

А. Киселевъ.

НАЧАЛА
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОГО
И ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЙ

(Курсъ VII класса реальныхъ училищъ).

Второе, переработанное и дополненное, издание „Начального учения о производныхъ“, допущенного Уч. Ком. М. Н. Пр. въ качествѣ руководства для VII класса реальныхъ училищъ (Журн. М. Н. Пр., 1908, іюнь).

Цѣна 1 руб.



Уч 7го ка
А. К. Заболотный

МОСКВА.
Т—во „Печатня С. П. Яковлева“. Петровка, Салтык. пер., д. Т—за, № 9
1909.

Начала интегрального исчисления.

Определенный интегралъ.

(Стран. 120—132).

90. Выражение площади помощью определенного интеграла.—91. По формулѣ скорости определить длину пути.—92. Вычисление определенного интеграла, исходя изъ его определенія.—93. Важное свойство определенного интеграла.—94. Зависимость между определеннымъ интеграломъ и первообразною функцией.—95. Примѣненіе этого свойства къ вычислению определенного интеграла.

Неопределенный интегралъ.

(Стран. 133—138).

96. Понятіе о неопределенномъ интегралѣ и объ интегрированіи.—97. Основныя формулы интегрированія.—98. Вынесеніе постоянного множителя за знакъ интегрированія.—99. Интегралъ суммы.

Нѣкоторые приемы интегрированія.

(Стран. 138—144).

100. Введеніе вспомогательной переменной.—101. Интегрированіе по частямъ.—102. Разложеніе на слагаемыя.

Нѣкоторыя геометрическія примѣненія интегрального исчисления.

I. Вычисление площадей, ограниченныхъ кривыми.

(Стран. 144—149).

103. Общий приемъ.—104. Парабола.—105. Эллипсъ.—106. Гипербола.

II Вычисление объемовъ тѣлъ вращенія.

(Стран. 150—153).

107. Общий приемъ.—108. Объемъ эллипсоида вращенія и шара.

III. Понятіе о вычислениі длины кривой.

(Стран. 154—156).

109. Общий приемъ.—110. Длина дуги параболы.

Упражненія.

Стран. 157

Лаборатория 1648-1711.

Математика 1642-1722

ВВЕДЕНИЕ.

Понятіе о функции; подраздѣленіе функций.

1. Понятіе о функции. Всякая величина, которая измѣняется при измѣненіи нѣкоторыхъ другихъ величинъ, можетъ быть названа функцией этихъ послѣднихъ. Такъ, длина хорды, проводимой въ данномъ кругѣ, измѣняется съ измѣненіемъ разстоянія ея отъ центра круга; значитъ, можно сказать, что длина такой хорды есть функция ея разстоянія отъ центра круга; подобно этому продолжительность одного качанія маятника есть функция его длины; величина пути, проходимаго тѣломъ при равномѣрномъ движеніи, есть функция скорости и времени, и т. д.

Если величины, отъ которыхъ зависитъ функция, могутъ быть измѣняемы произвольно, то онъ наз. перемѣнными независимыми, или аргументами функции; сама функция можетъ быть названа перемѣнной зависимой. Если, напр., мы рассматриваемъ зависимость объема конуса отъ радиуса основанія и высоты его, то можемъ сказать, что объемъ есть функция отъ двухъ переменныхъ независимыхъ, или отъ двухъ аргументовъ: отъ радиуса основанія и отъ высоты конуса.

Функции могутъ быть: отъ одного аргумента, отъ двухъ, трехъ и болѣе. Намъ, въ этой книгѣ, придется большою частью говорить только о такихъ функцияхъ, которая зависятъ отъ одного аргумента.

2. Обозначеніе функциональной зависимости. Чтобы обозначить, что величина u есть нѣкоторая функция отъ переменныхъ независимыхъ величинъ x, y, z, \dots , или, какъ иногда

говорить, что величина u находится въ функциональной зависимости отъ величинъ $x, y, z\dots$, пишутъ такъ:

$$u=f(x, y, z\dots)$$

гдѣ буква f есть начальная французскаго слова „fonction“ (что значить: функция). Выраженіе $f(x, y, z\dots)$ читается такъ: „функция отъ $x, y, z\dots$ “. Вмѣсто f употребляется буквы F, φ, Φ и нѣкоторыя другія. Напр., если, при рѣшеніи одного и того же вопроса, написано:

$$u=f(x) \quad v=F(x)$$

то этимъ выражено, что величина u есть нѣкоторая функция отъ переменной величины x и другая величина v есть нѣкоторая иная функция отъ той же переменной величины x .

Чаше всего зависимость между функцией и переменными независимыми дается уравненіемъ, связывающимъ между собою числа, измѣряющія эти величины. Напр., зависимость между длиною c окружности и ея радиусомъ r выражается уравненіемъ: $c=2\pi r$; зависимость между длиною e пути, проходимаго тѣломъ при равномѣрномъ движеніи, скоростью v и временемъ t выражается уравненіемъ: $e=vt$, и т. п.

3. Функции явные и неявные. Положимъ, что u есть число, измѣряющее функцию, а $x, y, z\dots$, числа, измѣряющія переменные независимыя. Если уравненіе, связывающее эти числа, задано въ такомъ видѣ: $u=f(x, y, z\dots)$, т.-е. уравненіе уже решено относительно u , то функция наз. явною; если же уравненіе еще не решено относительно u (быть можетъ, его и нельзя решить), то u наз. функцией неявною. Если, напр., задано: $u=\sqrt{x^2+y^2}$, то u есть явная функция отъ x и y , а если дано уравненіе $u^2-x^2-y^2=0$, то u есть неявная функция отъ x и y ; чтобы сдѣлать ее явною, надо, если возможно, решить уравненіе относительно u .

4. Функции однозначныя и многозначныя. Такъ какъ уравненіе, вообще говоря, имѣть нѣсколько решеній, то неявные функции принадлежать вообще къ такъ называемымъ многозначнымъ функциямъ, т.-е. къ такимъ, которые для данныхъ значений переменныхъ независимыхъ имѣютъ

не одно, а нѣсколько значеній. Напр., решивъ данное выше уравненіе относительно u , получимъ два решения:

$$u_1=+\sqrt{x^2+y^2} \text{ и } u_2=-\sqrt{x^2+y^2}.$$

Обыкновенно, говоря о неявныхъ функцияхъ, вводять нѣкоторыя дополнительныя условія, при которыхъ изо всѣхъ значеній неявной функциї берется какое-нибудь одно и слѣд. функция изъ многозначной обращается въ однозначную. Такъ, если въ указанномъ сейчасъ примѣрѣ введемъ дополнительное условіе, что u есть число положительное, то функция u дѣлается однозначной.

5. Функции алгебраическихъ и трансцендентныя. По роду зависимости отъ переменныхъ независимыхъ функции (явные и неявные) раздѣляются на два обширные класса: алгебраическая и трансцендентныя.

Алгебраическими функциями наз. тогда, когда для вычисления ихъ значеній по даннымъ значениямъ переменныхъ независимыхъ приходится совершить надъ этими значениями конечное число 6-ти алгебраическихъ дѣйствій: сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня, или же решить алгебраическое уравненіе, т.-е. такое, въ которомъ функция связана съ переменными независимыми помощью указанныхъ алгебраическихъ дѣйствій. Таковы, напр., слѣдующія функции (если $x, y, z\dots$ переменные независимыя):

$$u=x+y-z, \quad u=(xy)^3, \quad u=\sqrt[4]{\frac{x+y}{xy}}, \quad 2xu^3-4x^2u+10=0$$

Трансцендентными наз. всѣ тѣ функции, которые не могутъ быть причислены къ алгебраическимъ. Таковы, напр., функции (если x есть переменная независимая):

$$u=2^x \text{ (показательная функция).}$$

$$u=\log_a x \text{ (логарифмическая функция).}$$

$$u=\sin x \text{ (тригонометрическая функция)}$$

и множество другихъ.

6. Подраздѣленіе алгебраическихъ функций. Алгебраические функции раздѣляются на рациональныя и иррациональныя, при чемъ первыя подраздѣляются на цѣлыя и дробныя.

Алгебраическая функция наз. цѣлой, если она может быть приведена къ одночлену, или къ алгебраической суммѣ одночленовъ, вида $Ax^m y^n z^p \dots$, гдѣ $x, y, z \dots$ суть переменные независимы и $A, m, n, p \dots$ данные постоянныя числа, при чмъ показатели $m, n, p \dots$ числа цѣлые положительные (нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть равны 0). Сумма этихъ показателей въ томъ одночленѣ, гдѣ она наибольшая, наз. степенью цѣлой функции. Такъ, функция $u = x^2 - 2x + 3$ есть цѣлая второй степени отъ одной переменной x , функция $u = 3x^2y + 2y^2 - x$ есть цѣлая третьей степени отъ двухъ переменныхъ x и y , функция $u = 5x^4$ есть цѣлая четвертой степени отъ одной переменной x .

Алгебраическая функция наз. дробной, если она выражается дробью (или приводится къ дроби), у которой числитель и знаменатель суть цѣлые функции, при чмъ дробь эта не можетъ быть преобразована въ цѣлый видъ. Таковы, напр., функции:

$$u = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 3} \quad u = \frac{xy + x^2}{2xy - 1}$$

Цѣлые и дробные функции составляютъ отдѣль рациональныхъ функций.

Всѣ алгебраические функции, которыя не могутъ быть приведены къ рациональнымъ, составляютъ отдѣль функций иррациональныхъ. Такова, напримѣръ, явная функция $u = 3 + \sqrt{x^2 - 1}$, или неявная функция u , опредѣляемая уравнениемъ: $u^3 - 2xu + 5 = 0$.

16 сен 81

Основанія ученія о предѣлахъ.

7. Предварительное замѣчаніе. Мы будемъ предполагать, что всякое значеніе величины выражается числомъ, соизмѣримымъ (цѣлимъ или дробнымъ), или несоизмѣримымъ; такимъ образомъ, буквы латинскаго или греческаго алфавита будутъ у насъ означать не значеніе величины, а числа, которыми выражены эти значенія.

Замѣтимъ еще, что, помѣщая какое-нибудь буквенное выраженіе между двумя вертикальными чертами, мы этимъ будемъ обозначать абсолютную величину этого буквеннаго выраженія; напр., выражение:

$$|a - b|$$

будетъ у насъ означать абс. величину разности чиселъ a и b , т.-е. разность $a - b$, если $a > b$, и разность $b - a$, если $b > a$.

8. Опредѣленія. 1^o. Рѣшая какой-либо вопросъ, въ который входятъ нѣсколько величинъ, мы иногда предполагаемъ, что нѣкоторыя изъ этихъ величинъ сохраняютъ одно и тоже неизмѣнное значеніе, тогда какъ другія способны принимать бесчисленное множество различныхъ значеній. Первые величины наз. постоянными, вторыя—перемѣнными (эти же названія относятъ и къ числамъ, выражающимъ эти величины). Такъ, разсмотривая зависимость между длиною хорды и ея разстояніемъ отъ центра, мы считаемъ радиусъ круга величиною постоянную, а длину хорды и ея разстояніе отъ центра—величинами переменными.

Замѣтимъ, что нѣкоторыя величины (слѣд., и числа, ихъ измѣряющія) являются постоянными не потому, что мы ихъ такими предполагаемъ, а вслѣдствіе своего основного свойства; такъ, сумма угловъ всякаго плоскаго треугольника всегда равна 2π , отношеніе окружности къ своему диаметру всегда равно π , и т. п.

2^o. Перемѣнное число наз. безконечно малымъ, если при своемъ измѣненіи абсолютная величина его дѣлается и остается меньше всякаго данного положительного числа, какъ бы мало это число ни было.

Говоря: „дѣлается и остается“, мы желаемъ выразить двѣ мысли: 1) что рассматриваемое переменное число, измѣняясь, можетъ сдѣлаться по абс. величинѣ меньше всякаго данного положительного числа, какъ бы мало это число ни было, и 2) что при дальнѣйшемъ процессѣ измѣненія абс. величина переменнаго числа постоянно остается меньше этого даннаго числа.

Таково, напр., положительное число, измѣряющее разность площадей данного круга и правильного вписанного въ этотъ кругъ многоугольника, при условіи, что число сторонъ этого многоугольника неопределено удваивается; или отрицательное число, равное разности 0,999... - 1, при условіи, что число десятичныхъ знаковъ, въ периодической дроби безгранично увеличивается.

О бесконечно маломъ числѣ часто говорять, что оно стремится къ нулю.

Большою частью мы будемъ обозначать: бесконечно малыя числа греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma\dots$, перемѣнныя числа вообще послѣдними буквами латинскаго алфавита: $x, y, z\dots$, а постоянныя числа первыми буквами этого алфавита: $a, b, c\dots$, $A, B, C\dots$.

3^o. Перемѣнное число наз. бесконечно большимъ, если при своемъ измѣненіи абс. величина его дѣлается и остается больше всякаго данного положительного числа, какъ бы велико это число ни было.

Таково, напр., число $2d(n-2)$, выражающее сумму внутреннихъ угловъ многоугольника, при неограниченномъ увеличеніи числа сторонъ n .

О бесконечно большомъ числѣ иногда условно говорятъ, что оно стремится къ бесконечности ($\pm\infty$).

4^o. Перемѣнное число, не способное при своемъ измѣненіи сдѣлаться больше нѣкотораго постоянного числа, наз. конечнымъ числомъ.

Таково, напр., число, выражающее периметръ многоугольника, вписанного въ данную окружность, при произвольномъ измѣненіи числа и длины его сторонъ: число это не можетъ сдѣлаться больше постоянного числа, выражающаго периметръ какого-нибудь многоугольника, описанного около этой окружности, напр., периметръ описанного квадрата.*)

*^o) Въ геометріи доказывается, что „периметръ выпуклого многоугольника меньше периметра всякаго другого многоугольника, объемлющаго его“ (Эл. геом. А. Киселева, § 53).

9. Нѣкоторыя свойства бесконечно малыхъ чиселъ. 1^o. Алгебраическая сумма конечнаго числа бесконечно малыхъ чиселъ бесконечно мала, или равна 0.

Дѣйствительно, абс. величина алгебраической суммы бесконечно малыхъ чиселъ $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$, число которыхъ не превосходитъ постояннаго числа n , дѣлается и остается меньше любого положительного числа ϵ , потому что абс. величина каждого слагаемаго, по опредѣленію, дѣлается и остается меньше $\frac{\epsilon}{n}$. При этомъ, конечно, не исключается и тотъ случай, когда алгебраическая сумма окажется равной нулю.

2^o. Произведеніе бесконечно малаго числа на конечное число бесконечно мало. Въ самомъ дѣлѣ, если n есть конечное число, а α бесконечно малое, то $|\alpha n|$ дѣлается и остается меньше любого положительного числа ϵ , такъ какъ, по опредѣленію, $|\alpha|$ дѣлается и остается меньше $\frac{\epsilon}{n}$.

3^o. Произведеніе бесконечно малыхъ чиселъ бесконечно мало. Пусть $\alpha, \beta, \gamma\dots$ бесконечно малыя числа. Такъ какъ абс. величина каждого изъ нихъ дѣлается и остается меньше 1, а отъ умноженія на число, меньшее 1, множимое уменьшается (при умноженіи положительныхъ чиселъ), то:

$|\alpha| > |\alpha\beta| > |\alpha\beta\gamma| > \dots$

и, слѣд., всѣ произведенія $\alpha\beta, \alpha\beta\gamma\dots$, абс. величина которыхъ дѣлается и остается меньше абс. величины бесконечно малаго числа α , и подавно бесконечно малы.

4^o. Частное отъ дѣленія бесконечно малаго числа на число, не стремящееся къ нулю, бесконечно мало, потому что частное $\frac{\alpha}{n}$ равно произве-

деніе $\alpha \cdot \frac{1}{n}$, а дробь $\frac{1}{n}$, если n не стремится къ 0, есть число конечнѣе.

10. Опредѣленіе предѣла. Если переменное число x , измѣняющееся по нѣкоторому закону, при-

ближается къ постоянному числу a такъ, что обе величины разности $a-x$ дѣлается и остается меньше всякаго даннаго положительного числа, какъ бы мало это число ни было, то a наз. предѣломъ x ; другими словами, постоянное число a наз. предѣломъ x для x , если разность $a-x$ есть безконечно малое число.

Перемѣнная величина (слѣд., и число, измѣряющее ее), обладающая предѣломъ, можетъ приближаться къ нему различно: или постоянно увеличиваясь, или постоянно уменьшаясь, или же то увеличиваясь, то уменьшаясь, при чёмъ она можетъ быть то больше, то меньше своего предѣла. Напр., площадь прав. многоугольника, вписаннаго въ данный кругъ, при неограниченномъ удвоеніи числа сторонъ его приближается къ предѣлу (къ площади круга), постоянно увеличиваясь; при томъ же условіи площадь прав. описаннаго многоугольника приближается къ предѣлу, постоянно уменьшаясь. Если вообразимъ, что площадь прав. многоугольника измѣняется по такому закону: берется площадь какого-нибудь прав. вписаннаго многоугольника (напр. 6-угольника), затѣмъ площадь прав. одноименнаго описаннаго, затѣмъ площадь прав. вписаннаго, имѣющаго вдвое больше сторонъ (12-угольника), далѣе площадь одноименного описаннаго и т. д., постепенно переходя отъ вписаннаго къ описанному и наоборотъ, то будемъ имѣть примѣръ перемѣнной величины, приближающейся къ своему предѣлу (къ площади круга), то увеличиваясь, то уменьшаясь, и дѣлающейся то больше своего предѣла, то меньше его.

Что переменное число x имѣеть предѣль a , выражаютъ письменно такъ:

пред. $x=a$ или: $\lim x=a$

гдѣ \lim есть сокращеніе франц. слова limite (или латинскаго limes), что значитъ „предѣль“.

Вместо того, чтобы говорить: „ x имѣеть предѣль a “, часто говорятъ: „ x стремится къ предѣлу a “, или короче: „ x стремится къ a “.

Если обозначимъ разность между предѣломъ a переменнаго числа x и самимъ этимъ числомъ черезъ α , т.-е. положимъ, то $a-x=\alpha$, то, когда x стремится къ a , число α , согласно определенію предѣла, стремится къ 0, при чёмъ оно можетъ оставаться или положительнымъ (если $a>x$), или отрицательнымъ (если $a<x$), или дѣлается то положительнымъ, то отрицательнымъ (когда переменное число при измѣненіи дѣлается то меньше, то больше своего предѣла).

Замѣтимъ, что о всякомъ безконечно маломъ числѣ α можно сказать, что оно имѣеть предѣломъ 0, такъ какъ $|\alpha-0|=|\alpha|$, слѣд. разность $\alpha-0$ есть безконечно малое число.

Для обобщенія нѣкоторыхъ вопросовъ и выводовъ иногда постоянное число разсматриваются, какъ такое переменное, которое имѣеть предѣломъ это постоянное число.

11. Первые три теоремы о предѣлахъ. 1º. Перемѣнное число, измѣняющееся по определенному закону, не можетъ имѣть болѣе одного предѣла.

Док. Предположимъ, что число x , измѣняясь по определенному закону, стремится къ двумъ различнымъ предѣламъ a и b . Пусть $x=a+\alpha$ и $x=b+\beta$; тогда:

$$a+\alpha=b+\beta \text{ или } a-b=\beta-\alpha$$

Послѣднее равенство возможно только тогда, когда $a=b$ (и слѣд. $\beta=\alpha$), такъ какъ если бы $a\neq b$, то разность $a-b$ равнялась бы какому-нибудь постоянному числу, не равному 0, тогда какъ разность $\beta-\alpha$ безконечно мала (или равна 0).

2º. Если разность двухъ переменныхъ чиселъ (x и y) безконечно мала, или равна 0, и одно изъ нихъ имѣеть предѣль, то другое имѣеть тотъ же предѣлъ.

Док. Пусть $x-y=\varepsilon$, гдѣ ε есть безконечно малое число, положительное или отрицательное, или $\varepsilon=0$; положимъ что x имѣеть предѣль, и этотъ предѣль есть a ; тогда можемъ положить, что $x=a+\alpha$, гдѣ α безконечно малое число, положительное или отрицательное. Слѣд. $(a+\alpha)-y=\varepsilon$, откуда: $a-y=\varepsilon-\alpha$. Такъ какъ $\varepsilon-\alpha$ безконечно малое число, то изъ послѣдняго равенства заключаемъ, что пред. $y=a$.

Замѣчаніе. Частный случай этой теоремы, когда разность $x - y$ равна 0, составляет содержание доказываемой въ элементарной геометріи истины: „Если двѣ переменные величины, стремящіяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ, остаются равными, то равны и ихъ предѣлы“.

3º. (Обратная теорема). Если два переменныхъ числа (x и y) имѣютъ общій предѣль, то разность между ними безконечно мала, или равна 0.

Док. Пусть x и y имѣютъ общій предѣль a . Тогда можно положить: $x = a + \alpha$ и $y = a + \beta$, где α и β суть безконечно малыя числа, положительныя или отрицательныя; слѣд:

$$x - y = (a + \alpha) - (a + \beta) = \alpha - \beta$$

т.-е. разность $x - y$ есть безконечно малое число, или равна 0.

12. Предѣль суммы, произведенія, частнаго, степени и корня.
1º. Предѣль алгебраической суммы конечнаго числа переменныхъ чиселъ (x, y, z, \dots), стремящихся къ предѣламъ (a, b, c, \dots), равенъ алгебраической суммѣ этихъ предѣловъ.

Док. Если положимъ, что $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, $z = c + \gamma, \dots$, то $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ должны быть числа безконечно малыя. Тогда:

$$\begin{aligned} x + y + z + \dots &= (a + \alpha) + (b + \beta) + (c + \gamma) + \dots \\ &= (a + b + c + \dots) + (\alpha + \beta + \gamma + \dots) \end{aligned}$$

и, слѣд.;

$$(x + y + z + \dots) - (a + b + c + \dots) = \alpha + \beta + \gamma + \dots$$

Такъ какъ алг. сумма $\alpha + \beta + \gamma + \dots$, при условіи, что число слагаемыхъ конечно, безконечно мала, то изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ:

$$\text{пред. } (x + y + z + \dots) = a + b + c + \dots$$

2º. Предѣль произведенія конечнаго числа переменныхъ чиселъ (x, y, z, \dots), стремящихся къ предѣламъ (a, b, c, \dots), равенъ произведенію этихъ предѣловъ.

Док. Сначала докажемъ теорему для двухъ сомножителей x и y . Положивъ $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, будемъ имѣть:

$$xy - ab = (a + \alpha)(b + \beta) - ab = ab + \beta a + \alpha b$$

Правая часть этого равенства безконечно мала ($\S 9$); слѣд., и лѣвая часть безконечно мала; а это значитъ, что:

$$\text{пред. } (xy) = ab$$

Возмемъ теперь произведение трехъ сомножителей xyz . Разсматривая его, какъ произведение только двухъ сомножителей (xy) и z , будемъ по доказанному, имѣть:

$$\text{пред. } (xyz) = \text{пред. } (xy) \cdot \text{пред. } z$$

$$\text{Но пред. } (xy) = \text{пред. } x \cdot \text{пред. } y.$$

$$\text{Слѣд. пред. } (xyz) = \text{пред. } x \cdot \text{пред. } y \cdot \text{пред. } z = abc.$$

Затѣмъ можемъ доказать теорему для 4-хъ, потомъ для 5-и и т. д. сомножителей, лишь бы число сомножителей было конечное.

3º. Предѣль частнаго $\left(\frac{x}{y}\right)$ переменныхъ чиселъ, стремящихся къ предѣламъ (a и b), равенъ частному этихъ предѣловъ, если только предѣль дѣлителя не равенъ нулю.

Док. Положивъ по прежнему: $x = a + \alpha$ и $y = b + \beta$, будемъ имѣть:

$$\frac{x}{y} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{b + \beta} = \frac{(a + \alpha)b - (b + \beta)a}{(b + \beta)b} = \frac{ab - \beta a}{(b + \beta)b}$$

Рассматривая правую часть этого равенства, замѣчаемъ, что числитель $ab - \beta a$ есть безконечно малое число, такъ какъ онъ представляетъ собою алгебр. сумму безконечно малыхъ чиселъ, а знаменатель $(b + \beta)b$, имѣя предѣломъ число b^2 , не стремится къ 0, если только $b \neq 0$. Поэтому правая часть выведенаго равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, безконечно мала ($\S 9,4$). Отсюда слѣдуетъ, что:

$$\text{пред. } \frac{x}{y} = \frac{b}{a} = \frac{\text{пред. } x}{\text{пред. } y} \quad (\text{если пред. } y \neq 0)$$

Замѣчаніе. Доказываемая въ элементарной геометріи теорема: „если двѣ переменные величины, стремящіяся къ предѣламъ, при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ сохраняютъ одно и то же отношеніе, то въ томъ же отношеніи находятся и ихъ предѣлы“ можетъ быть рассматриваема, какъ частный случай теоремы 3-й.

Действительно, согласно этой теоремѣ:

$$\text{пред. } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Но, по условію, отношеніе $\frac{x}{y}$ равно постоянному числу q , а постоянное число можно рассматривать, какъ переменное, котораго предѣлъ есть само это число; слѣд.:;

$$\text{пред. } \frac{x}{y} = q \text{ и потому } \frac{a}{b} = q$$

4º. Предѣлъ степени (x^m) , въ которой основаніе есть число переменное, стремящееся къ предѣлу (a) , а показатель—число постоянное цѣлое и положительное, равенъ той же степени предѣла основанія (a^m) .

Теорему эту можно рассматривать, какъ прямое слѣдствіе теоремы о предѣлѣ произведенія, такъ какъ при m цѣломъ положительномъ степень x^m представляетъ собою произведеніе m сомножителей $xxx\dots x$ и, слѣд.:

$$\text{пред. } (x^m) = \text{пред. } (xxx\dots x) = aaa\dots a = a^m.$$

5º. Предѣлъ корня $(\sqrt[m]{x})$, у котораго показатель есть постоянное цѣлое и положительное число, а подкоренное число переменное, стремящееся къ предѣлу (a) , равенъ корню той же степени изъ этого предѣла $(\sqrt[m]{a})$, за исключеніемъ случая, когда, при четномъ показателѣ корня, подкоренное число отрицательно.

Док. Обозначимъ предѣлъ $\sqrt[m]{x}$, если онъ существуетъ, черезъ P , т. е. положимъ:

$$\text{пред. } \sqrt[m]{x} = P$$

Возвысимъ обѣ части этого равенства въ m -ую степень:

$$(\text{пред. } \sqrt[m]{x})^m = P^m$$

Но, согласно теоремѣ 4-й:

$$(\text{пред. } \sqrt[m]{x})^m = \text{пред. } (\sqrt[m]{x})^m = \text{пред. } x = a$$

$$\text{Слѣд.: } P^m = a \text{ и } P = \sqrt[m]{a}$$

Случай, когда при m четномъ подкоренное число отрицательно, долженъ быть исключенъ, такъ какъ тогда корень представляетъ собою мнимое число.

Прежде чѣмъ доказывать другія теоремы о предѣлахъ, мы разсмотримъ.

13. Нѣкоторыя свойства показательной функциї a^x . Изъ элементарной алгебры мы имѣемъ точное представление о значеніи степени a^x тогда, когда x есть какое-нибудь рациональное число. Такъ, если $x=0$, степень a^x условно принимается равной 1; если x есть цѣлое положительное число m , то степень a^x представляетъ собою произведеніе m одинаковыхъ сомножителей $aaa\dots a$; когда x есть положительная дробь $\frac{p}{q}$, тогда степень a^x означаетъ $\sqrt[q]{a^p}$.

Пусть теперь x будетъ какое-нибудь ирраціональное (несоизмѣримое) число; допустимъ, что рациональныя числа x' и x'' будутъ два его приближенія значенія, одно съ недостаткомъ, а другое съ избыткомъ. Не вдаваясь въ подробности теоріи ирраціональныхъ чиселъ, примемъ, какъ допущеніе, что степень a^x въ этомъ случаѣ представляетъ собою нѣкоторое число, заключающееся между $a^{x'}$ и $a^{x''}$.

Когда x есть отрицательное "число $-m$ ", то a^x означаетъ дробь $\frac{1}{a^m}$.

Если основаніе степени a есть число постоянное, а показатель x есть число переменное, то выраженіе a^x представляетъ собою такъ называемую показательную функцию отъ аргумента x . Мы будемъ предполагать: 1) что основаніе степени a есть положительное число, не равное 1*).

*). Если бы $a=1$, то a^x всегда равнялось бы 1; если бы a было отрицательное число, то a^x въ многихъ случаяхъ было бы числомъ мнимымъ; такъ, $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$.

и 2) что въ томъ случаѣ, когда x есть какая нибудь дробь $\frac{p}{q}$ и когда, слѣд., степень a^x представляетъ собою корень $\sqrt[q]{a^p}$, мы будемъ брать изъ всѣхъ значеній радикала только одно ариѳметическое, т. е. положительное; это условіе дѣлаетъ функцию a^x во всѣхъ случаяхъ однозначной.

Укажемъ теперь нѣкоторыя свойства показательной функции, которая понадобятся намъ впослѣдствії.

I. Число a^x при всякомъ вещественномъ значеніи x положительно.

Дѣйствительно, если $x=0$, то $a^x=1$ и слѣд. есть число положительное. Если x есть положительное цѣлое число, то a^x , представляя собою произведение положительныхъ сомножителей, также положительно. Если x есть полож. дробь, то a^x означаетъ корень вѣкторой степени изъ положительного числа, а мы условились изъ всѣхъ значеній корня брать только ариѳметическое; значитъ, и въ этомъ случаѣ a^x есть число положительное. Если x есть ирраціональное число, а x' и x'' его два рациональныя приближенныя значения, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ, то a^x , заключаясь между двумя положительными числами $a^{x'}$ и $a^{x''}$, должно быть также положительно. Наконецъ, если x есть отрицательное число $-m$, то функция a^x , равная дроби $\frac{1}{a^m}$, есть положительное число, такъ какъ $a^m > 0$.

II. Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при x положительномъ и $a^x < 1$ при x отрицательномъ.

Пусть $a > 1$; тогда при цѣломъ положительномъ значеніи x число a^x больше 1, какъ произведеніе множителей, большихъ 1; при $x = \frac{p}{q}$ число a^x больше 1, такъ какъ $a^p > 1$ и слѣд. $\sqrt[q]{a^p} > \sqrt[q]{1} = 1$. Если x есть ирраціональное число, а x' и x'' его два рациональныя приближенныя значения, одно съ недостаткомъ, другое съ избыткомъ, то a^x , заключаясь между двумя числами $a^{x'}$ и $a^{x''}$, которая оба больше 1, само

должно быть больше 1. Если x есть отрицательное число, напр. $x = -x'$, то $a^x = a^{-x'} = \frac{1}{a^{x'}}$, и такъ какъ $a^{x'} > 1$, то $\frac{1}{a^{x'}} < 1$.

Если допустимъ, что $a < 1$, то, повторивъ разсужденія, изложенные сейчасъ, придемъ къ обратнымъ заключеніямъ, т. е. если $a < 1$, то при x положительномъ $a^x < 1$, а при x отрицательномъ $a^x > 1$.

III. Если $a > 1$, то при возрастаніи x число a^x возрастаетъ (убываетъ, когда $a < 1$).

Возьмемъ разность: $a^x - a^{x'} = a^{x'}(a^{x-x'} - 1)$. Если $x > x'$, то $x - x'$ есть число положительное и потому, согласно свойству II, $a^{x-x'} > 1$, если $a > 1$, и $a^{x-x'} < 1$, если $a < 1$; съ другой стороны, согласно свойству I, число $a^{x'}$ всегда положительно; значитъ, правая часть написанного выше равенства есть число положительное, когда $a > 1$, и отрицательное, когда $a < 1$; значитъ, $a^x > a^{x'}$ въ первомъ случаѣ и $a^x < a^{x'}$ во второмъ случаѣ.

IV. Если α стремится къ 0, то пред. $a^\alpha = 1$.

Положимъ сначала, что $a > 1$ и α приближается къ 0, оставаясь положительнымъ. Тогда $a^\alpha > 1$ (свойство II). Докажемъ, что разность $a^\alpha - 1$ дѣлается и остается меньше любого даннаго положительнаго числа ε , какъ бы мало оно ни было. Такъ какъ $1 + \varepsilon > 1$, то безконечная геометрическая прогрессія:

$$1, 1 + \varepsilon, (1 + \varepsilon)^2, (1 + \varepsilon)^3, \dots, (1 + \varepsilon)^n, \dots$$

есть возрастающая, а потому, при достаточномъ удаленіи отъ начала ряда, члены ея могутъ превзойти какое угодно данное число. Значитъ, существуетъ такое цѣлое положительное число n , которое удовлетворяетъ неравенству:

$(1 + \varepsilon)^n > a$, или $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$. Когда число α стремится къ 0, оставаясь положительнымъ, оно при этомъ, конечно, дѣлается и остается меньше дроби $\frac{1}{n}$. Тогда $a^\alpha < a^{\frac{1}{n}}$ (свой-

ство III) и подавно $a^\alpha < 1 + \varepsilon$, т. е. $a^\alpha - 1 < \varepsilon$; а это значитъ, что пред. $a^\alpha = 1$.

Положимъ теперь, что, при $a > 1$, число α стремится къ 0, оставаясь отрицательнымъ. Пусть $\alpha = -\alpha'$; тогда $a^\alpha = a^{-\alpha'} = \frac{1}{a^{\alpha'}}$. Когда α стремится къ 0, оставаясь отрицательнымъ, α' стремится къ 0, оставаясь положительнымъ, и потому, по доказанному, пред. $a^{\alpha'} = 1$; слѣд. пред. $a^\alpha =$ пред. $\frac{1}{a^{\alpha'}} = \frac{1}{1} = 1$.

Наконецъ, допустимъ, что $a < 1$. Положимъ, что $a = \frac{1}{a_1}$, где $a_1 > 1$. Тогда $a^\alpha = \left(\frac{1}{a_1}\right)^\alpha = \frac{1}{a_1^\alpha}$. Такъ какъ, по доказанному, пред. $a_1^\alpha = 1$, то и пред. $a^\alpha =$ пред. $\left(\frac{1}{a_1^\alpha}\right) = \frac{1}{1} = 1$.

Теперь мы можемъ перейти къ доказательству нѣкоторыхъ другихъ важныхъ теоремъ о предѣлахъ.

14. Предѣль степени a^α . Предѣль степени (a^α) , въ которой показатель есть число переменное, стремящееся къ предѣлу, а основаніе число постоянное, равенъ этому постоянному числу, возвышеному въ степень, показатель которой есть предѣль переменнаго показателя.

Док. Пусть предѣль x равенъ X . Докажемъ, что разность $a^X - a^x$ безконечно мала. Для этого представимъ ее так:

$$a^X - a^x = a^X (1 - a^{x-X})$$

Такъ какъ X есть предѣль x , то разность $x - X$ безконечно мала, поэтому показательная функция a^{x-X} , когда x стремится къ X , имѣеть, по доказанному выше, предѣломъ 1; вслѣдствіе этого правая часть написанного равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, безконечно мала; а это значитъ, что

$$\text{пред. } a^x = a^X = a \text{ пред. } x$$

15. Предѣль логарифма. Предѣль логарифма переменнаго числа, стремящагося къ предѣлу, равенъ логарифму этого предѣла.

Док. Пусть $\log_a x = y$; тогда $x = a^y$ и слѣд.: пред. $x =$ пред. (a^y) .

Примѣня предыдущую теорему, получимъ: пред. $x =$ пред. $(a^y) = a$ пред. y .

Откуда: пред. $y = \log_a$ (пред. x).
т.е. пред. $(\log_a x) = \log_a$ (пред. x).

16. Обобщеніе теоремы о предѣль степени. Предѣль степени (x^y) равенъ предѣлу переменнаго основанія, возвышенному въ степень, показатель которой есть предѣль переменнаго показателя, г. е. пред. $(x^y) =$ (пред. x) пред. y .

Док. Вмѣсто того, чтобы искать предѣль степени x^y , станемъ сначала искать предѣль ея логариома, а затѣмъ уже найдемъ и предѣль самой степени. Логариомируя, находимъ:

$$\log(x^y) = y \log x$$

(предполагается какое-нибудь основаніе логариомовъ, которое мы не пишемъ при знакѣ \log).

$$\begin{aligned} \text{Отсюда: пред. } [\log(x^y)] &= \text{пред. } (y \log x) = \\ &= (\text{пред. } y) [\text{пред. } (\log x)]. \end{aligned}$$

Но, согласно предыдущей теоремѣ,

$$\text{пред. } (\log x) = \log (\text{пред. } x).$$

Слѣд.: пред. $[\log(x^y)] =$ (пред. y) $[\log (\text{пред. } x)]$.

или: пред. $[\log(x^y)] = \log [(\text{пред. } x)^{\text{пред. } y}]$

На основаніи предыдущей теоремы лѣвую часть этого равенства можно замѣнить на \log [пред. (x^y)]; послѣ замѣны получимъ:

$$\log [\text{пред. } (x^y)] = \log [(\text{пред. } x)^{\text{пред. } y}].$$

Но если равны логариомы, то равны и числа; поэтому:

$$\text{пред. } (x^y) = (\text{пред. } x) \text{ пред. } y.$$

Замѣчаніе. Доказанная теорема, конечно, примѣнима къ случаю, когда не оба числа x и y переменны, какъ мы сейчасъ предполагали, а только какое-нибудь одно изъ нихъ;

стоить только постоянное число рассматривать, какъ переменное, котораго предѣль равенъ этому постоянному числу. Такимъ образомъ, если a есть число постоянное:

$$\text{пред. } a^x = a \text{ пред. } x^a \text{ и пред. } x^a = (\text{пред. } x)^a$$

17. Къ изложеннымъ теоремамъ о предѣлахъ добавимъ еще три важныя истины, которыми намъ придется неоднократно пользоваться впослѣдствіи. Изъ этихъ истинъ первую мы изложимъ, какъ теорему, т.-е. снабдимъ ее доказательствомъ, а остальные двѣ (почти очевидныя) примемъ, какъ допущенія, безъ доказательства.

Теорема. Если два ряда n положительныхъ чиселъ:

$$\begin{aligned} & a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n \\ & \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n \end{aligned}$$

удовлетворяютъ условіямъ, что при неограниченномъ возрастаніи числа n :

- 1) каждое изъ этихъ чиселъ стремится къ 0
и 2) предѣль каждого изъ отношеній:

$$\frac{a_1}{\beta_1}, \frac{a_2}{\beta_2}, \frac{a_3}{\beta_3}, \dots, \frac{a_{n-1}}{\beta_{n-1}}, \frac{a_n}{\beta_n} \quad [1]$$

равенъ 1, то предѣль отношенія:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{n-1} + \beta_n} \quad [2]$$

также равенъ 1.

Док. Пусть изъ всѣхъ отношеній [1] наименьшее (или по крайней мѣрѣ не превосходящее ни одно изъ остальныхъ) будетъ имѣть величину q , а наибольшее (или по крайней мѣрѣ не меньшее ни одного изъ остальныхъ) будетъ равно Q . Тогда можемъ написать:

$$\frac{a_1}{\beta_1} \geq q, \frac{a_2}{\beta_2} \geq q, \frac{a_3}{\beta_3} \geq q, \dots, \frac{a_n}{\beta_n} \geq q.$$

$$\frac{a_1}{\beta_1} \leq Q, \frac{a_2}{\beta_2} \leq Q, \frac{a_3}{\beta_3} \leq Q, \dots, \frac{a_n}{\beta_n} \leq Q.$$

Такъ какъ, по условію, числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ всѣ положительны, а отъ умноженія частей неравенства на положитель-

ное число знакъ неравенства не измѣняется, то изъ наименованныхъ неравенствъ выводимъ:

$$\begin{aligned} a_1 &\geq \beta_1 q, a_2 \geq \beta_2 q, a_3 \geq \beta_3 q, \dots, a_n \geq \beta_n q \\ a_1 &\leq \beta_1 Q, a_2 \leq \beta_2 Q, a_3 \leq \beta_3 Q, \dots, a_n \leq \beta_n Q \end{aligned}$$

Сложивъ почленно всѣ неравенства первой строки между собою и неравенства второй строки между собою, получимъ:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &\geq (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n) q \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &\leq (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n) Q \end{aligned}$$

Откуда, раздѣливъ обѣ части неравенствъ на положительное число $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$, найдемъ:

$$Q \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n} \geq q$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что отношеніе [2] заключается между наименьшимъ и наибольшимъ отношеніемъ изъ ряда [1].

Но, по условію, при неограниченномъ вырастаніи n всѣ отношенія ряда [1], а слѣд. и наибольшее, и наименьшее изъ нихъ, т. е. Q и q , стремятся къ предѣлу 1; поэтому и отношеніе [2], какъ заключающееся между q и Q , также имѣеть предѣломъ 1.

Слѣдствіе. Изъ того, что предѣль отношенія [2] есть 1, слѣдуетъ, что суммы $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$ неограниченно приближаются къ равенству между собою, когда n возрастаетъ, и потому предѣлы этихъ суммъ (если таковые существуютъ) должны быть равны между собою. Поэтому при вычисленіи предѣла одной изъ этихъ суммъ, напр., предѣла суммы $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, можно всѣ слагаемыя a замѣнить соответственными слагаемыми β (и наоборотъ).

18. Допущенія о предѣлахъ. 1º. Если переменное число все возрастаетъ, оставаясь однако менѣе некотораго постоянного числа, то оно имѣеть предѣль, менѣйший этого постоянного числа, или равный ему.

20. Если перемѣнное число все убываетъ, оставаясь однако больше нѣкотораго постояннаго числа, то оно имѣеть предѣлъ, большій этого постояннаго числа, или равный ему.

Примѣры. 1) Периметръ правильнаго вписанного многоугольника при неограниченномъ удвоеніи числа его сторонъ, все возрастаетъ, оставаясь однако меньше периметра любого описанного многоугольника, напр. описанного квадрата; при этихъ условіяхъ периметръ вписанного мн-ка имѣеть предѣлъ (онъ принимается за длину окружности).

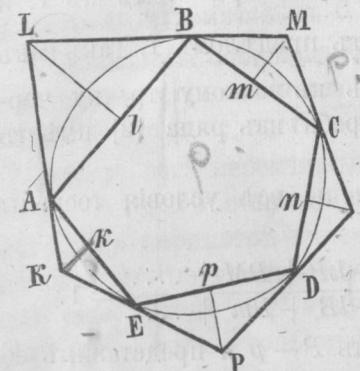
2) Площадь правильнаго описанного мн-ка при неограниченномъ удвоеніи числа его сторонъ все убываетъ, оставаясь однако больше площади круга; при этихъ условіяхъ площадь описанного мн-ка имѣеть предѣлъ (онъ равенъ площади круга).

Нѣкоторыя примѣненія ученія о предѣлахъ.

1. Обоснованіе нѣкоторыхъ теоремъ элементарной геометріи.

19. Длина окружности. Нахожденіе длины окружности въ зависимости отъ ея радиуса основывается, какъ извѣстно изъ геометріи, на слѣдующемъ опредѣленіи: „за длину окружности принимаютъ предѣлъ, къ которому стремится периметръ многоугольника, вписанного въ эту окружность, когда стороны его неограниченно уменьшаются и, слѣд., число сторонъ безпредѣльно возрастаетъ“. Въ элементарной геометріи мы принимали безъ доказательства, что, во-1-хъ, такой предѣлъ существуетъ, и во 2-хъ, онъ не зависитъ отъ того закона, по которому стороны вписанного многоугольника уменьшаются. Теперь, на основаніи изложеннаго ученія о предѣлахъ, мы можемъ выполнить это доказательство.

Пусть $ABCDE$ (черт. 1) есть какой-нибудь многоугольникъ, вписанный въ данную окружность.



Черт. 1.

Проведемъ черезъ всѣ вершины касательныя къ окружности до взаимнаго пересѣченія. Тогда получимъ описанный мн-къ $KLMNP$. Условимся называть такой описанный мн-къ соотвѣтственнымъ для вписанного мн-ка $ABCDE$.

Доказательство наше будетъ состоять изъ слѣдующихъ трехъ частей:

1º. Пусть p есть число, выражающее периметръ какого угодно вписанного, а P число, выражающее периметръ соотвѣтственнаго описанного мн-ка. Докажемъ, что разность $P - p$ стремится къ 0, когда стороны вписанного мн-ка стремятся къ 0 по какому угодно закону. Для этого предварительно найдемъ предѣлъ отношенія $P:p$. Изъ вершинъ K, L, M, N и P опустимъ перпендикуляры на стороны вписанного многоугольника. Тогда:

$$\begin{aligned} P &= AL + LB + BM + MC + CN + ND + DP + \dots \\ p &= Al + LB + Bm + mC + Cn + nD + Dp + \dots \end{aligned} \quad [1]$$

Докажемъ, что при неограниченномъ возрастаніи числа сторонъ вписанного многоугольника каждое изъ отношеній:

$$\frac{AL}{Al}, \frac{LB}{LB}, \frac{BM}{Bm}, \dots, \frac{KA}{kA} \quad [2]$$

стремится къ предѣлу 1. Возмемъ какое-нибудь одно изъ нихъ напр. $\frac{AL}{Al}$. Изъ прямоугольнаго тр-ка ALL (черт. 1) мы усматриваемъ, что

$$Al = AL \cos A; \text{ откуда } \frac{AL}{Al} = \frac{1}{\cos A}$$

Когда стороны вписанного многоугольника стремятся къ 0, угол A, составленный касательною AL и хордою AB, также стремится къ 0, слѣд., $\cos A$ стремится при этомъ къ 1, и потому отношение $\frac{AL}{AB}$ также имѣеть предѣломъ 1. Такъ какъ это разсужденіе можно примѣнить къ всякому трѣку чертежа 1-го, то, значитъ, каждая дробь изъ ряда [2] имѣеть предѣломъ 1.

Но въ такомъ случаѣ выполнены всѣ условія теоремы § 17, и поэтому

$$\text{пред. } \frac{P}{p} = \text{пред. } \frac{AL + LB + BM + \dots}{AL + LB + BM + \dots} = 1.$$

Доказавъ это, возьмемъ разность $P - p$ и представимъ ее такъ:

$$P - p = p \left(\frac{P}{p} - 1 \right)$$

Отношеніе $\frac{P}{p}$ стремится къ 1; слѣд. разность $\frac{P}{p} - 1$ стре-

мится къ 0; вслѣдствіе этого и произведеніе $p \left(\frac{P}{p} - 1 \right)$, въ которомъ p есть величина конечная (такъ какъ периметръ любаго вписанного мнѣка всегда остается меньше периметра всякаго описанного) также стремится къ 0; значитъ, то же самое можно сказать о разности $P - p$.

2º. Докажемъ теперь, что периметръ вписанного мнѣка стремится къ предѣлу при слѣдующемъ частномъ законѣ вписыванія. Впишемъ въ кругъ правильный трѣкъ; затѣмъ удвоимъ число сторонъ, т.-е. возьмемъ правильный вписанный 6-угольникъ; далѣе удвоимъ опять число сторонъ, т.-е. возьмемъ правильный 12-угольникъ; вообразимъ, что этотъ процессъ удвоенія идетъ безъ конца. Тогда периметры такихъ вписанныхъ многоугольниковъ, увеличиваются съ каждымъ удвоеніемъ, все будутъ возрастать, оставаясь однако меньше периметра любаго описанного мнѣка; вслѣдствіе этого (допущеніе 1-е, § 18) периметръ вписанного мнѣка, стороны котораго стремятся къ 0 по этому частному

закону, имѣеть предѣль. Обозначимъ его черезъ T. Тотъ же предѣль имѣеть и периметръ соотвѣтственнаго описанного мнѣка, такъ какъ, по доказанному, разность между этими периметрами стремится къ 0 (теорема 2, § 11).

3º. Докажемъ, наконецъ, что къ тому же предѣлу T стремится периметръ вписанного мнѣка, стороны котораго уменьшаются по какому угодно закону.

Пусть p_1 есть перемѣнныи периметръ такого вписанного мнѣка, котораго стороны уменьшаются по произвольному закону, а p периметръ вписанного мнѣка, стороны котораго уменьшаются по указанному выше частному закону; положимъ еще, что P_1 и P будуть периметры соотвѣтственныхъ описанныхъ многоугольниковъ. По доказанному въ части 1º этого изложения разности:

$$P_1 - p_1 \text{ и } P - p$$

стремятся къ 0. Поэтому и сумма ихъ должна стремиться къ 0. Но эту сумму можно представить такъ:

$$(P_1 - p) + (P - p_1)$$

Изъ геометріи извѣстно, что „периметръ выпуклаго многоугольника меньше периметра всякаго другого многоугольника, объемлющаго его“. Поэтому $p < P_1$ и $p_1 < P$; слѣд., обѣ разности $P_1 - p$ и $P - p_1$ положительны; сумма же положительныхъ слагаемыхъ стремится къ 0 только тогда, когда каждое слагаемое стремится къ 0; слѣд., разности $P_1 - p$ и $P - p_1$ стремятся къ 0.

Отсюда слѣдуетъ:

$$\text{пред. } P_1 = \text{пред. } p \text{ и пред. } P = \text{пред. } p_1.$$

$$\text{Но } \text{пред. } P = T$$

Слѣд. пред. $p_1 = \text{пред. } P_1 = \text{пред. } p = \text{пред. } P = T$, т. е. этотъ предѣль существуетъ и есть единственный для данной окружности.

Замѣчаніе. Примѣненіе изложенное доказательство не къ данной окружности, а къ какой-нибудь ея части, или вообще къ какой-нибудь выпуклой кривой (кривую не выпуклую

можно разбить на выпуклые части), мы можем установить следующую более общую истину:

Периметр ломаной линии, вписанной въ конечную кривую, стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда стороны ломаной стремятся къ 0.

Предѣль этотъ принимается за длину кривой.

20. Площадь круга. Въ геометрии доказывается, что площадь круга есть общій предѣль площадей правильныхъ вписанныхъ и описанныхъ мн—ковъ при неограниченномъ удвоеніи числа ихъ сторонъ. Добавимъ здѣсь доказательство того, что площадь всякая (а не только правильного) вписанного (или описанного) многоугольника стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда стороны его неограниченно уменьшаются по какому угодно закону (а не только по закону удвоенія).

Пусть стороны какого-нибудь вписанного мн—ка будутъ $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ и перпендикуляры, опущенные изъ центра круга на эти стороны, будутъ соотвѣтственно: $h_1, h_2, h_3 \dots h_n$. Тогда площадь q этого многоугольника (разбитаго радиусами, проведенными къ вершинамъ, на треугольники) выразится:

$$q = \frac{1}{2} (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots + a_n h_n)$$

Пусть изъ всѣхъ перпендикуляровъ h наибольшій или, по крайней мѣрѣ, не меньшій ни одного изъ остальныхъ, будетъ h_e , а наименьшій или, по крайней мѣрѣ, не больший ни одного изъ остальныхъ, будетъ h_k , тогда:

$$\frac{1}{2} (a_1 h_k + a_2 h_k + \dots + a_n h_k) \leq q \leq \frac{1}{2} (a_1 h_e + a_2 h_e + \dots + a_n h_e)$$

или, обозначивъ черезъ p периметръ мн—ка:

$$\frac{1}{2} p h_k \leq q \leq \frac{1}{2} p h_e$$

Пусть теперь стороны мн—ка уменьшаются неограниченно по какому угодно закону. Тогда p, h_k и h_e дѣлаются числами переменными, причемъ p , по доказанному выше (§ 19),

стремится къ предѣлу и притомъ единственному, прини-
маемому за длину окружности C , а перпендикуляры h_k
и h_e стремятся къ радиусу R . Такъ какъ предѣль произ-
веденія равенъ произведенію предѣловъ, то $\frac{1}{2} p h_k$ и $\frac{1}{2} p h_e$

стремятся къ общему предѣлу $\frac{1}{2} C R$, а слѣд. и q , постоянно

заключающееся между $\frac{1}{2} p h_k$ и $\frac{1}{2} p h_e$, тоже стремится къ этому
предѣлу, который есть площадь круга.

Доказательство для площади описанного мн—ка было бы
еще проще, такъ какъ перпендикуляры, опущенные изъ
центра на стороны, были бы всѣ одинаковы и постоянны, а
именно радиусы круга.

21. Поверхность и объемъ цилиндра. Приводимъ доказа-
тельство, опускаемое въ элементарной геометрии, что бо-
ковая поверхность (и объемъ) вписанной въ ци-
линдръ (или описанной около него) призмы, при не-
ограниченномъ уменьшениі ея боковыхъ гра-
ней по какому угодно закону, стремится къ
предѣлу и притомъ единственному.

Обозначимъ черезъ p, q и h периметръ основанія, пло-
щадь основанія и высоту призмы, вписанной въ данный ци-
линдръ. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{бок. поверхность призмы} &= ph \\ \text{объемъ} &= qh \end{aligned}$$

Пусть теперь стороны основанія вписанной призмы умень-
шаются, стремясь къ 0. Тогда, каковъ бы ни былъ законъ
этого уменьшения, p стремится къ предѣлу, длины C окру-
жности основанія цилиндра, а q къ площади Q этого осно-
ванія. Значить:

$$\begin{aligned} \text{предѣль бок. пов. призмы} &= Ph \\ \text{” объема} &= Qh \end{aligned}$$

Такое же доказательство можно привести и для описан-
ной призмы. Эти предѣлы принимаются за боковую поверх-
ность и объемъ цилиндра.

С. С. 3

22. Поверхность и объемъ конуса. Докажемъ, что боковая поверхность (и объемъ) вписанной въ конусъ (или описанной около него) пирамиды стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда боковые грани неограниченно уменьшаются по какому угодно закону.

1) Относительно поверхности. Пусть стороны основания какой-нибудь пирамиды, вписанной въ данный конусъ, будутъ: $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ и перпендикуляры, опущенные изъ вершины конуса на эти стороны, соответственно будутъ: $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$. Тогда:

$$\text{бок. поверх. пирам.} = \frac{1}{2} (a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n).$$

Пусть изъ всѣхъ перпендикуляровъ l наибольшій (по крайней мѣрѣ, не меньшій ни одного изъ остальныхъ), будетъ l_e и наименьшій (по крайней мѣрѣ, не большій ни одного изъ остальныхъ) будетъ l_k ; тогда:

$$\frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) l_e \geqslant \text{бок. пов. пирам.} \geqslant \frac{1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) l_k$$

$$\text{или } \frac{1}{2} pl_e \geqslant \text{бок. пов. пирам.} \geqslant \frac{1}{2} pl_k$$

если p означаетъ периметръ основанія.

При неограниченномъ уменьшеніи боковыхъ граней произведенія pl_e и pl_k стремятся къ единственному, предѣлу, именно къ Cl , если C есть окружность основанія, а l образующая конуса; поэтому

$$\text{пред. бок. поверх. пирам.} = \frac{1}{2} Cl$$

Доказательство было бы еще проще для описанной пирамиды, такъ какъ тогда всѣ перпендикуляры, опущенные на стороны основанія изъ вершины конуса, были бы равны образующей конуса.

Этотъ предѣлъ принимается за боковую поверхность конуса.

2) Относительно объема. Если q есть площадь основанія вписанной или описанной пирамиды, а H высота

конуса, то объемъ пирамиды $= \frac{1}{3} qH$. При неограниченномъ уменьшеніи боковыхъ граней пирамиды величина q стремится къ единственному предѣлу, площади Q круга. Слѣд. предѣль объема пирамиды $= \frac{1}{3} QH$. Этотъ предѣлъ и есть объемъ конуса.

23. Поверхность и объемъ шара. 1) Впишемъ въ дугу BE полуокружности какую-нибудь (а не только правильную, какъ это мы дѣлали въ эл. геометрії) ломаную линію $BCDE$.

Докажемъ, что поверхность, образуемая вращеніемъ этой ломаной вокругъ диаметра AF , стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда стороны ломаной неограниченно уменьшаются (и, слѣд., число сторонъ безпредѣльно возрастаетъ) по какому угодно закону.

Проведя изъ центра O перпендикуляры OK, OL, OM на стороны ломаной линіи и изъ точекъ B, C, D, E перпендикуляры Bb, Cc, Dd, Ee на диаметръ AF , мы будемъ имѣть по известной теоремѣ геометрії *):

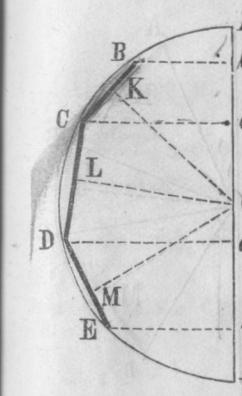
$$\begin{aligned} \text{Поверхн. } BC &= 2\pi \cdot OK \cdot bc \\ \text{Поверхн. } CD &= 2\pi \cdot OL \cdot cd \\ \text{Поверхн. } DE &= 2\pi \cdot OM \cdot de \end{aligned} \quad [1]$$

Пусть наибольшій изъ перпендикуляровъ $OK, OL, OM\dots$, или, по крайней мѣрѣ, не меньшій ни одного изъ остальныхъ, будетъ имѣть величину α , а наименьшій, или, по крайней мѣрѣ, не большій ни одного изъ остальныхъ, величину β . Тогда изъ равенствъ [1] выводимъ:

$$2\pi \alpha \cdot be \geqslant \text{поверхн. } BCDE \geqslant 2\pi \beta \cdot be \quad [2]$$

Предположимъ, что стороны ломаной стремятся къ нулю по какому угодно закону. Тогда α и β дѣлаются величинами переменными; каждая изъ нихъ стремится къ одному и тому

*.) См., напр., § 446 «Элем. геометрії», сост. А. Киселевъ.



Черт. 2.

же предѣлу, именно къ радиусу R круга; величина be остается постоянной. Слѣд., изъ неравенствъ [2] можемъ вывести:

$$\text{пред. поверх. } BCDE = 2\pi R \cdot be$$

Этотъ предѣль принимается за величину поверхности шарового пояса, описанного вращеніемъ дуги BE вокругъ диаметра AF . Поэтому:

Поверхность шарового пояса равна произведенію окружности большого круга на высоту пояса.

Совершенно также найдемъ, что поверхность шара равна $2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

2) Впишемъ въ дугу окружности AD произвольную ломаную линію $ABCD$.

Докажемъ, что объемъ тѣла, произведенаго вращеніемъ вокругъ диаметра EF многоугольнаго сектора $OABCD$, стремится къ предѣлу и притомъ единственному, когда стороны ломаной стремятся къ O по какому угодно закону.

Проведя изъ O перпендикуляры на стороны ломаной $OK, OL, OM\dots$ будемъ имѣть на основаніи геометрической теоремы: *)

$$\text{Объемъ } OABCD = \text{Пов.}(AB) \cdot \frac{OK}{3} + \text{Пов.}(BC) \cdot \frac{OL}{3} +$$

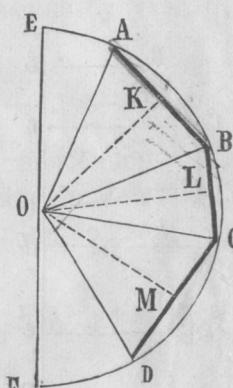
$$\text{Пов. }(CE) \cdot \frac{OM}{3}$$

Пусть наибольшій изъ перпендикуляровъ $OK, OL, OM\dots$, или, по крайней мѣрѣ, не меньшій ни одного изъ остальныхъ, имѣть длину α , а наименьшій, или, по крайней мѣрѣ, не большій ни одного изъ остальныхъ, длину β . Тогда

$$\text{Пов. }(ABCD) \cdot \frac{\alpha}{3} \geqslant \text{Объемъ } OABCD \geqslant \text{Пов. }(ABCD) \cdot \frac{\beta}{3}$$

Когда стороны ломаной стремятся къ O , пов. $(ABCD)$, по доказанному выше, стремится къ единственному предѣлу,

*) См. напр., § 453 «Элем. геометріи» сост. А. Киселевъ.



Черт. 3.

принимаемому за поверхность шарового пояса (AD) ; въ то же время величины α и β стремятся къ общему предѣлу, а именно къ радиусу шара R ; слѣд.

$$\text{предѣль объема } OABCD = \text{Пов. }(AD) \cdot \frac{R}{3}$$

Этотъ единственный предѣль и есть объемъ шарового сектора OAD . Послѣ этого легко вывести, что объемъ шара равенъ произведенію его поверхности на третью радиуса.

Задача

II. Число e , служащее основаніемъ натуральныхъ логарифмовъ.

~~24. Безконечный рядъ, опредѣляющій e .~~ Возьмемъ рядъ чиселъ, составленный по слѣдующему закону:

$$u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{1}, u_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}, u_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots u_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

и составимъ сумму S_n первыхъ $n+1$ членовъ этого ряда:

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \quad [1]$$

Докажемъ, что при неограниченномъ возрастаніи n эта сумма стремится къ нѣкоторому предѣлу. Прежде всего замѣтимъ, что при возрастаніи n число слагаемыхъ этой суммы увеличивается, и такъ какъ всѣ слагаемыя постоянны и положительны, то сумма при этомъ все возрастаетъ; если мы докажемъ, что она остается меньше нѣкотораго постояннаго числа, то на основаніи одного изъ принятыхъ нами допущений о предѣлахъ (§ 18) заключимъ, что S_n имѣть предѣль. Для доказательства сравнимъ S_n съ такою суммою $n+1$ слагаемыхъ:

$$S'_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad [2]$$

Первые три слагаемыя у обѣихъ суммъ одинаковы; всѣ же остальные слагаемыя суммы S_n меньше соответственныхъ слагаемыхъ суммы S'_n . Значить, $S_n < S'_n$. Отбросивъ въ S'_n первое слагаемое, мы получимъ сумму членовъ геометри-

ческой убывающей прогрессии. При неограниченномъ возрастаніи числа n эта сумма стремится къ предѣлу:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Значитъ, $S'_n < 1+2$, т. е. $S'_n < 3$; поэтому сумма S_n , и подавно, меньше 3. Отсюда слѣдуетъ, что при неограниченномъ возрастаніи n сумма S_n стремится къ нѣкоторому предѣлу, меньшему или равному 3 (но, очевидно, большему 2-хъ, такъ какъ сумма только первыхъ двѣхъ слагаемыхъ S_n составляеть 2). Обозначимъ этотъ предѣль черезъ e .

Если для приближенного вычислениія числа e мы вмѣсто этого числа возьмемъ S_n , то получимъ приближенное значеніе e съ недостаткомъ, причемъ

$$\text{погрѣшность} = e - S_n = \text{пред. } (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots)$$

Чтобы имѣть понятіе о величинѣ этой погрѣшности, сравнимъ рядъ:

$$u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \dots$$

съ такимъ:

$$\frac{u_n}{n+1}, \frac{u_n}{(n+1)^2}, \frac{u_n}{(n+1)^3}, \dots$$

Первые члены у обѣихъ рядовъ одинаковы; всѣ остальные члены первого ряда меньше соответственныхъ членовъ второго ряда; напр., $u_{n+3} < \frac{u_n}{(n+1)^3}$, такъ какъ:

$$u_{n+3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\text{и } \frac{u_n}{(n+1)^3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)(n+1)(n+1)}$$

Поэтому предѣль суммы членовъ первого ряда меньше предѣла суммы членовъ второго ряда; но послѣдній предѣль, по извѣстному свойству геометрической убывающей прогрессии, равенъ:

$$\frac{u_n}{n+1} : \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{u_n}{n}$$

Поэтому:

$$e - S_n < \frac{u_n}{n}$$

Если, напр., положимъ $n=2$, то найдемъ:

$$S_2 = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} = 2 \frac{1}{2}; \quad u_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad e - 2 \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$$

Такимъ образомъ, если вмѣсто точной величины e возьмемъ число $2 \frac{1}{2}$, то, во 1, мы возьмемъ меньше, чѣмъ слѣдуетъ, и во 2, ошибка окажется меньше $\frac{1}{4}$.

Доказано, что число e принадлежить не только къ иррациональнымъ числамъ, но и къ такъ называемымъ трансцендентнымъ, т. е. къ такимъ, которыхъ не могутъ быть корнемъ никакого алгебраического уравненія съ рациональными коэффиціентами.

Сумма 11 членовъ ряда [1] даетъ для e приближенное число:

$$e = 2,7182818$$

точное до 1 десятимиллионной.

Число e имѣть большое значеніе въ высшей математикѣ. Одно изъ его важныхъ свойствъ указывается въ слѣдующемъ параграфѣ.

25. Предѣль степени $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Докажемъ, что при неограниченномъ возрастаніи абсолютной величины числа n (которое можетъ быть и положительнымъ, и отрицательнымъ) предѣль степени $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ есть e , то число, о которомъ мы говорили въ предыдущемъ параграфѣ.

Наше доказательство будетъ состоять изъ слѣдующихъ трехъ частей.

1º. Предположимъ сначала, что n возрастаетъ, переходя только черезъ цѣлые положительные значения. Тогда по формулы бинома Ньютона будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots \\ &\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \cdot \frac{1}{n^p} + \dots + \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

Это можно переписать такъ:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \\ &\quad + \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} + \dots \quad [3] \end{aligned}$$

При возрастаніи n число слагаемыхъ этой суммы, равное $n+1$, возрастаетъ и слагаемыя остаются положительными; при этомъ первыя два слагаемыя, какъ независящія отъ n , остаются безъ измѣненія, но третье, четвертое и слѣдующія слагаемыя, очевидно, увеличиваются. Изъ этого слѣдуетъ,

что при возрастаніи n число $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастаетъ. Покажемъ, что оно при этомъ остается меньше числа e . Сравнивая сумму [3] съ суммой [1] предыдущаго §, видимъ, что первыя два слагаемыя обѣихъ суммъ одинаковы, а всѣ прочія слагаемыя суммы [3] меньше соответственныхъ слагаемыхъ суммы [1]. Значитъ, при возрастаніи n число $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастаетъ, но остается меньше e , предѣла суммы [1]. Изъ этого, на основаніи допущенія о предѣлахъ, заключаемъ, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ предѣлу, равному или меньшему e .

Пусть этотъ предѣль будеть e' . Тогда $e' \leq e$. Остается показать, что e' не можетъ быть меньше e .

Обозначимъ черезъ s_p сумму первыхъ $p+1$ членовъ разложенія [3] и черезъ r_p сумму остальныхъ членовъ; тогда

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = s_p + r_p$$

Предполагая p постояннымъ, станемъ увеличивать n безпредѣльно; тогда

$$\text{пред. } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{пред. } s_p + \text{пред. } r_p$$

Сравнивъ s_p съ суммою S_p первыхъ $p+1$ слагаемыхъ равенства [1] предыдущаго §, видимъ, что при p постоянномъ

и при неограниченномъ возрастаніи n сумма s_p стремится къ предѣлу S_p , такъ какъ предѣль каждого слагаемаго суммы s_p равенъ соответственному слагаемому суммы S_p , напр.:

$$\begin{aligned} \text{пред. } \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= \frac{\text{пред. } \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ пред. } \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{aligned}$$

Поэтому пред. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = S_p + \text{пред. } r_p$

т.е. $e' = S_p + \text{пред. } r_p$

И такъ какъ пред. $r_p > 0$, то

$$\begin{array}{c} S_p < e' \\ \hline S_p < e' \leq e \\ e - e' < e - S_p \end{array}$$

Такимъ образомъ:

и слѣд.

При возрастаніи p разность $e - S_p$ стремится къ 0; и такъ какъ e и e' числа постоянныя, то послѣднее неравенство возможно только при условіи, что $e = e'$.

2º Допустимъ теперь, что n возрастаетъ, переходя черезъ какія бы то ни было положительныя значения. Если обозначимъ черезъ m наибольшее цѣлое число, заключающееся въ n , то

$$\underline{n \geq m} \quad \text{и} \quad \underline{n < m+1}$$

$$\text{и слѣд. } 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{m}$$

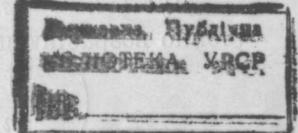
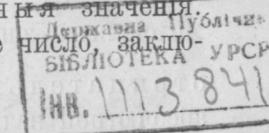
$$\text{и потому } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$$

$$\text{и подавно } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} \quad (\S \ 13, \text{ III}).$$

$$\text{Съ другой стороны: } 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{m+1}$$

$$\text{и слѣд. } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$$

А. Киселевъ. Нач. диф. и инт. исчислений.



$$\text{и подавно } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m$$

Такимъ образомъ:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m$$

Что можно представить такъ:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} : \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)$$

При неограниченномъ возрастаніи n числа m и $m+1$ также возрастаютъ неограниченно; но тогда, по доказанному, степени $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ и $\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ стремятся къ e , а биномы $1 + \frac{1}{m}$ и $1 + \frac{1}{m+1}$ оба стремятся къ 1; слѣд., лѣвая и правая часть послѣдняго неравенства стремятся къ e , а потому и $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ тому же предѣлу e .

3^o Покажемъ наконецъ, что къ тому же предѣлу e стремится выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и тогда, когда n , оставаясь отрицательнымъ, неограниченно увеличивается по абсолютной величинѣ.

Пусть $n = -n'$, где n' положительное число, неограниченно возрастающее. Тогда

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(1 - \frac{1}{n'}\right)^{-n'} = \left(\frac{n'-1}{n'}\right)^{-n'} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{n'-1}{n'}\right)^{n'}} = \left(\frac{1}{\frac{n'-1}{n'}}\right)^{n'} = \left(\frac{n'}{n'-1}\right)^{n'} \\ &= \left(\frac{n'-1+1}{n'-1}\right)^{n'} = \left(1 + \frac{1}{n'-1}\right)^{n'-1} \times \left(1 + \frac{1}{n'-1}\right) \end{aligned}$$

При возрастаніи n' первый множитель полученнаго произведения по доказанному, стремится къ e , а второй къ 1;

слѣд. выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремится къ e и въ этомъ случаѣ.

Итакъ, какъ бы не измѣнялось число n , лишь бы только абс. величина его неограничено увеличивалась, всегда

$$\text{Пред. } \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]_{n=\pm\infty} = e.$$

Здѣсь равенство: $n = \pm\infty$, поставленное внизу скобокъ, должно быть читаемо такъ: „когда n стремится къ $\pm\infty$ “, т.-е. когда абс. величина числа n возрастаетъ безпредѣльно.

Выраженію $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ придаютъ иногда другой видъ, который полезно замѣтить. Положимъ, что $\frac{1}{n} = a$ и, слѣд. $n = \frac{1}{a}$; тогда $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1+a)^{\frac{1}{a}}$. Когда абс. величина n неограничено увеличивается, число a стремится къ 0, оставаясь положительнымъ или отрицательнымъ; при этомъ, по доказанному:

$$\text{Пред. } \left[(1+a)^{\frac{1}{a}} \right]_{a=0} = e$$

26. Натуральная система логариѳомовъ. Модуль. Система логариѳомовъ, вычисленныхъ по основанію $e = 2,7182818\dots$, наз. натуральною. Логариѳомы этой системы въ отличіе отъ логариѳомовъ другихъ системъ мы будемъ обозначать посредствомъ большей буквы L , т.-е. вмѣсто того, чтобы писать такъ: $\log_e N = x$, мы будемъ писать просто: $Log N = x$ и даже еще короче: $L N = x$. Натуральная система логариѳомовъ обладаетъ многими важными преимуществами сравнительно со всѣми другими системами. Мы будемъ имѣть случай въ этой книгѣ ознакомиться съ нѣкоторыми изъ этихъ преимуществъ. Здѣсь ограничимся указаніемъ, какъ можно, зная логариѳомы натуральной системы, вычислить логариѳомы по какой-нибудь другой системѣ и наоборотъ.

Пусть N есть некоторое число, котораго логарифмъ по основанію a есть x и логарифмъ по другому основанію a_1 есть x_1 . Тогда

$$N = a^x \text{ и } N = a_1^{x_1}; \text{ слѣд. } a^x = a_1^{x_1}$$

Логарифмируемъ это равенство сначала по основанію a , затѣмъ по основанію a_1 :

$$x = x_1 \log_a a_1; \quad x \log_{a_1} a = x_1$$

Откуда: $\frac{x}{x_1} = \log_a a_1 = \frac{1}{\log_{a_1} a}$

Такъ какъ $x = \log_a N$ и $x_1 = \log_{a_1} N$, то

$$\frac{\log_a N}{\log_{a_1} N} = \log_a a_1 = \frac{1}{\log_{a_1} a}$$

Т.-е. отношеніе логарифмовъ одного и того же числа N , взятыхъ по основаніямъ a и a_1 , не зависитъ отъ числа N ; оно равно логарифму второго основанія, взятыму по первому основанію, или обратному логарифму первого основанія, взятыму по второму основанію.

Положивъ $a_1 = e$, получимъ:

$$\frac{\log_a N}{\log N} = \log_e e = \frac{1}{\log a}$$

откуда: $\log_a N = \log N \cdot \log_e e = \log N \cdot \frac{1}{\log a}$

Постоянное число $\log_e e$ или $\frac{1}{\log a}$, на которое надо умножить натуральный логарифмъ числа, чтобы получить логарифмъ этого числа по системѣ съ основаніемъ a , наз. модулемъ системы логарифмовъ съ основаніемъ a ; напр., модуль M десятичной системы есть

$$M = \log_{10} e = \frac{1}{\log 10} (= 0,4342945\dots)$$

Начала дифференціального исчисленія.

Понятіе о непрерывности функції.

27. Предварительное замѣчаніе. Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ говорить о функціяхъ, зависящихъ только отъ одного аргумента. При этомъ, говоря о непрерывномъ измѣненіи аргумента въ области (a, b) , мы будемъ разумѣть, что аргументъ, возрастая отъ значенія a до значенія b , большаго a , переходитъ черезъ всевозможныя промежуточныя значенія, какъ рациональныя, такъ и ирраціональныя (конечно, вещественныя).

Пусть $f(x)$ есть некоторая функція отъ x . Дадимъ аргументу какое-нибудь значение a ; тогда соответствующее значеніе функції мы будемъ обозначать такъ: $f(a)$. Если, напр., $f(x) = 3x^2 - 5$, то при $x = 10$ значеніе функції будетъ $f(10) = 3 \cdot 10^2 - 5 = 295$. Будемъ называть разность:

$$f(a+h) - f(a)$$

приращеніемъ функції $f(x)$, при $x=a$, соответствующимъ приращенію аргумента на h ; послѣднее можетъ быть числомъ положительнымъ и отрицательнымъ. Напр., приращеніе функції $3x^2 - 5$ при $x=10$, соответствующее приращенію x на $0,1$, будетъ:

$$[3(10+0,1)^2 - 5] - (3 \cdot 10^2 - 5) = 6 + 0,03 = 6,03$$

При томъ же значеніи x приращеніе функції, соответствующее приращенію x на $-0,1$, окажется:

$$[3(10-0,1)^2 - 5] - (3 \cdot 10^2 - 5) = -6 + 0,03 = -5,97$$

28. Опредѣленіе непрерывности функції для данного значенія аргумента. Функція $f(x)$ наз. непрерывной для

данного значения аргумента $x=a$, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) При $x=a$ функция получает одно определенное вещественное и конечное значение;

2) бесконечно малому приращению аргумента, начиная от значения $x=a$, соответствует бесконечно малое приращение функции.

Возьмем, напр., функцию $\sqrt{x^2 - 9}$, в которой знаком $\sqrt{}$ обозначено арифметическое значение радикала. При $x=5$ эта функция непрерывна, так как:

1) при этом значении x она получает одно определенное вещественное и конечное значение, а именно $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$;

2) приращение этой функции, соответствующее приращению аргумента, начиная от значения $x=5$, на положительное или отрицательное число h , равно:

$$\sqrt{(5+h)^2 - 9} - \sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{16 + 10h + h^2} - 4$$

Когда h стремится к 0, предел этого приращения, согласно теоремам о пределах, равен:

$$\text{пред. } \sqrt{16 + 10h + h^2} - 4 = \sqrt{\text{пред. } (16 + 10h + h^2)} - 4 = \\ = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0.$$

Значит, при h бесконечно малом приращении функции $\sqrt{x^2 - 9}$ также бесконечно мало.

В данном примере, при $x=5$, функция оказывается непрерывной в обе стороны, т.е. и при положительном приращении аргумента и при отрицательном. Но так бывает не всегда. Напр., та же функция $\sqrt{x^2 - 9}$ при $x=3$ непрерывна только в одну сторону, в сторону положительного приращения x , так как для всех значений x , abs. величина которых меньше 3, разность $x^2 - 9$ является отрицательной, и корень квадратный из нея становится мнимым.

Когда говорят, что при $x=a$ функция $f(x)$ непрерывна, без указания, в какую сторону, то подразумевают, что она непрерывна в обе стороны.

Приведем примеры функций, которые не могут быть названы непрерывными при некоторых значениях аргумента:

1) $\frac{1}{x-3}$ при $x=3$, так как при этом значении аргумента функция перестает существовать, обращаясь в ∞ .

2) $\sqrt{x-5}$ при $x < 5$, так как тогда функция перестает существовать, делясь мнимой.

3) $\sqrt{-(x-2)^2}$ ни при каком значении x не есть непрерывная функция, так как при $x \geq 2$ число $-(x-2)^2$ всегда отрицательно и, слд., квадр. корень из этого числа мнимый; если же $x=2$, то хотя эта функция при этом значении x иметь одно определенное вещественное и конечное значение (именно 0), но приращению аргумента не соответствует никакого приращения функции (получается мнимое приращение).

✓ 29. Теоремы о непрерывности. 1º. Если функция $f(x)$ непрерывна для $x=a$, то, когда x стремится к пределу a , функция $f(x)$ также стремится к пределу, а именно к тому значению $f(a)$, которое она получает при $x=a$.

2º. Обратно: если $f(x)$ стремится к пределу, равному $f(a)$, когда x стремится к a , то $f(x)$ непрерывна при $x=a$.

Док. Если функция $f(x)$ непрерывна для $x=a$, то во 1) $f(a)$ представляет собою одно определенное вещественное и конечное число, и во 2) разность $f(a+h) - f(a)$, при бесконечно малом h , положительном или отрицательном, также бесконечно мала (согласно определению непрерывности); а это значит, что когда h стремится к 0, т.е. когда x стремится к a , предел функции $f(x)$ равен $f(a)$.

2º. Если предел функции $f(x)$, когда x стремится к a , равен $f(a)$, то, значит: 1) $f(a)$ есть определенное вещественное конечное число, и 2) разность $f(a+h) - f(a)$, при h бесконечно малом, бесконечно мала; слд., функция $f(x)$ непрерывна для $x=a$.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна для $x=a$ только в одну сторону, то указанные две теоремы не теряют своей

сили при условії, что x стремится къ a съ той стороны, для которой $f(x)$ непрерывна.

ЗО. Слѣдствія. Эти двѣ теоремы позволяютъ во многихъ случаяхъ судить о непрерывности функціи при посредствѣ известныхъ свойствъ предѣловъ. Напр., зная, что предѣль алгебраической суммы конечнаго числа перемѣнныхъ чиселъ, стремящихся къ предѣламъ, равенъ той же суммѣ этихъ предѣловъ, мы можемъ утверждать, что алгебраическая сумма конечнаго числа функцій, непрерывныхъ для $x=a$, есть функція, непрерывная для $x=a$.

Дѣйствительно, если $f(x), f_1(x), f_{11}(x) \dots$ суть функціи непрерывны для $x=a$, то, когда x стремится къ a , эти функціи стремятся, по доказанному, къ предѣламъ $f(a), f_1(a), f_{11}(a) \dots$ и слѣд.

$$\text{пред. } [f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)] = \text{пред. } f(x) + \text{пред. } f_1(x) - \text{пред. } f_{11}(x) = f(a) + f_1(a) - f_{11}(a)$$

т.-е. предѣль функціи $f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)$ есть то значеніе ея, которое она получаетъ при $x=a$; поэтому, согласно теоремѣ 2-ой, эта функція непрерывна.

Совершенно такъ же можно доказать, что и вѣмъ другимъ теоремамъ о предѣлахъ (§ 12) соответствуютъ аналогичные теоремы о непрерывности; такъ:

Произведеніе конечнаго числа функцій, непрерывныхъ для $x=a$, есть функція, непрерывная для $x=a$.

Частное двухъ функцій, непрерывныхъ для $x=a$, есть функція, непрерывная для $x=a$, если при этомъ значеніи аргумента дѣлитель не обращается въ 0.

Цѣлая и положительная степень функціи, непрерывной для $x=a$, есть функція, непрерывная для $x=a$.

Корень съ постояннымъ цѣлымъ и положительнымъ показателемъ изъ функціи, непрерывной для $x=a$, есть функція, непрерывная для $x=a$, за исключеніемъ случая, когда при

четномъ показателѣ корня подкоренная функція, при $x=a$, обращается въ отрицательное число.

31. Примѣненія. 1) Функція Ax^n , гдѣ A и n постоянныя числа, при чмѣ n число цѣлое и положительное, непрерывна для всякаго значенія x , такъ какъ она представляетъ собою произведение постояннаго числа A^* на цѣлую и положительную степень непрерывнаго аргумента x .

2) Цѣлый рациональный многочленъ съ постоянными вещественными коэффиціентами $A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots$ есть функція, непрерывная для всякаго значенія x , такъ какъ этотъ многочленъ есть алгебраическая сумма конечнаго числа функцій, непрерывныхъ для всякаго значенія x .

3) Дробь, у которой числитель и знаменатель суть цѣлые многочлены аргумента x , есть функція, непрерывная для всякаго значенія x , не обращающаго въ 0 знаменателя. Таковы, напр., дроби:

$$\frac{ax+b}{a_1x+b_1}, \quad \frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$$

4) Функція $\sqrt[n]{ax+b}$ непрерывна для всякаго значенія x ; функція $\sqrt{ax^2+bx+c}$ непрерывна для всякаго значенія x , при которомъ $ax^2+bx+c \geqslant 0$.

32. Определеніе непрерывности функціи для данной области. Функція $f(x)$ наз. непрерывной въ области аргумента (a, b) , если: 1) она непрерывна для каждого значенія x , заключающагося между a и b , и 2) непрерывна при $x=a$ по крайней мѣрѣ въ сторону возрастанія аргумента и при $x=b$ по крайней мѣрѣ въ сторону убыванія аргумента.

Такъ, функція $\sqrt{(5-x)(x-1)}$ непрерывна въ области аргумента $(1, 5)$. Дѣйствительно, во-1-хъ, она непрерывна для всякаго значенія x , удовлетворяющаго неравенству: $1 < x < 5$, такъ какъ для каждого такого значенія подкоренная функція непрерывна и притомъ положительна, во-2-хъ, она непрерывна для $x=1$ въ сторону возрастанія аргумента и для

*.) Всякое постоянное число можно рассматривать, какъ частный случай непрерывной функции.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e^{2a}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| -\frac{3}{x} \right|^x \right) = e^{-15}$$

$x=5$ непрерывна въ сторону убыванія аргумента (при $x < 1$ и при $x > 5$ функція становиться мнимої).

Если функція $f(x)$ непрерывна для каждого значенія x , превосходящаго a , и непрерывна для $x=a$ по крайней мѣрѣ въ сторону возрастанія аргумента, то условно говорять, что $f(x)$ непрерывна въ области $(a, +\infty)$.

Подобно этому говорять, что $f(x)$ непрерывна въ области $(-\infty, a)$, если эта функція непрерывна для всякаго значенія x , меньшаго a , и непрерывна для $x=a$ по крайней мѣрѣ въ сторону убыванія аргумента. Наконецъ, если $f(x)$ непрерывна для любого значенія x , какъ положительного, такъ и отрицательного, то говорять, что $f(x)$ непрерывна въ области $(-\infty, +\infty)$.

33. Разрывъ непрерывности. Если функція непрерывна для всякаго значенія аргумента, принадлежащаго области (a, b) , за исключениемъ нѣкотораго значенія $x=c$, то говорятъ, что при этомъ значеніи аргумента функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. Напр., функція

$\frac{1}{2-x}$ при возрастаніи x отъ $-\infty$ до $+2$, оставаясь постоянно положительной, измѣняется непрерывно отъ 0 до $+\infty$; при возрастаніи x отъ $+2$ до $+\infty$ она, оставаясь постоянно отрицательной, также измѣняется непрерывно отъ $-\infty$ до 0; слѣд., при переходѣ x черезъ значеніе 2 эта функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, переходя скачкомъ отъ $+\infty$ къ $-\infty$.

Подобный же разрывъ непрерывности претерпѣваетъ функція $\tan x$ при $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, \frac{(2k+1)\pi}{2}$.

34. Геометрическое представлениe функціи. Для нагляднаго представления хода измѣненія данной функціи при непрерывномъ измѣненіи ея аргумента, прибегаютъ часто къ геометрическому изображенію функціи. Пусть, напр., намъ дана такая функція:

$$y = x^3 - 2x + 1$$

Дадимъ аргументу x рядъ произвольныхъ значеній, напр. такихъ:

$$x = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$$

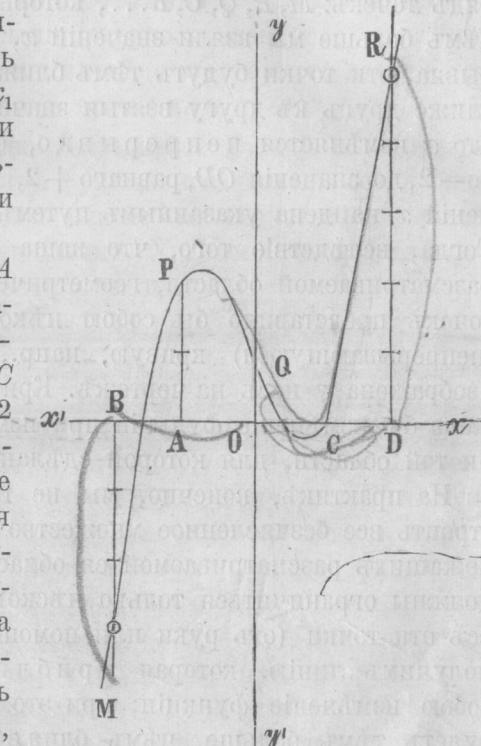
$$= e^{-15}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{2x}}{x} \right) = 2.$$

Вычислимъ соответствующія значенія функціи:

$$y = \dots, -3, +2, +1, 0, +5, \dots$$

Начертимъ (черт. 4) двѣ перпендикулярныя прямые xx_1 и yy_1 , пересекающіяся между собою въ точкѣ O , и, принявъ произвольный отрѣзокъ прямой за единицу, станемъ откладывать значенія x на прямой xx_1 вправо отъ точки O , если эти значенія положительны, и влѣво отъ нея, если они отрицательны*).

Такимъ образомъ, OA представляетъ собою значеніе x , равное -1 , OB — значеніе x , равное -2 , OC выражаетъ $+1$, $OD = +2$ и т. д. Точка O представляетъ значеніе x , равное нулю. Теперь условимся откладывать соотвѣтствующія значенія самой функціи, т.-е. значенія y , на перпендикулярахъ, установленныхъ въ точкахъ B, A, O, C, D, \dots , при чемъ, если значенія функціи положительны, мы ихъ бу-



Черт. 4.

*.) Для такихъ чертежей всего удобнѣе брать такъ называемую миллиметровую бумагу, т.-е. такую, которая горизонтальными и вертикальными параллельными прямыми раздѣлена на квадратные миллиметры. Прямые xx_1 и yy_1 надо проводить такъ, чтобы онѣ совпадали съ какими-нибудь прямыми бумаги. За единицу длины всего лучше брать тогда миллиметръ или сантиметръ.

Замѣтимъ, что при построении кривой данной функціи нѣть надобности для ординатъ брать ту же единицу длины, какая взята для абсциссъ. Мы можемъ, напр., для абсциссъ взять за единицу сантиметръ, а для ординатъ миллиметръ. Тогда, конечно, получится кривая, сжатая въ вертикальномъ направлении, но общий характеръ ея сохранится.

демъ откладывать вверхъ отъ прямой xx_1 , а когда они отрицательны,—внизъ отъ этой прямой. Такимъ образомъ, отрѣзокъ BM представляетъ значение функции, равное -3 , при $x = -2$; отрѣзокъ AP выражаетъ значение функции, равное $+2$, при $x = -1$ и т. д. Мы получимъ такимъ образомъ, рядъ точекъ: $M, P, Q, C, R\dots$, которыхъ будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше мы взяли значеній x , и, если функция непрерывна, эти точки будутъ тѣмъ ближе другъ къ другу, чѣмъ ближе другъ къ другу взятыя значенія x . Вообразимъ себѣ, что x измѣняется непрерывно, отъ значенія OB , равнаго -2 , до значенія OD , равнаго $+2$, и что для каждого значенія x найдена указаннымъ путемъ соотвѣтствующая точка. Тогда, вслѣдствіе того, что наша функция непрерывна въ рассматриваемой области, геометрическое мѣсто всѣхъ этихъ точекъ представило бы собою нѣкоторую непрерывную (непрерывающуюся) кривую, напр., въ родѣ той, которая изображена у насъ на чертежѣ. Кривая эта наглядно выражала бы измѣненіе функции при измѣненіи аргумента, внутри той области, для которой сдѣланъ чертежъ.

На практикѣ, конечно, мы не имѣемъ возможности построить все безчисленное множество точекъ кривой, принадлежащихъ рассматриваемой ея области; по необходимости мы должны ограничиться только нѣсколькими точками. Обведя всѣ эти точки (отъ руки или помошью лекала) кривою, мы получимъ линію, которая приблизительно выражаетъ собою измѣненіе функции; при этомъ степень приближенія будетъ тѣмъ больше, чѣмъ ближе другъ къ другу будутъ построенные указаннымъ способомъ точки.

Кривая, полученная такимъ образомъ, назыв. кривою данной функции, или ея графикой. Растоянія OB , OA , OC , $OD\dots$, выражающія различныя значенія аргумента x , назыв. абсциссами кривой; отрѣзки BM , $AP\dots$, представляющіе значенія y , т.-е. самой функции, наз. ординатами кривой; тѣ и другія совмѣстно наз. координатами. Неограниченная прямая xx_1 наз. осью абсциссъ, или осью иксовъ, неограниченная прямая yy_1 , параллельно которой проводятся ординаты, наз. осью ординатъ.

натъ, или осью игрековъ; та и другая совмѣстно наз. осями координатъ. Точка O есть начало координатъ. Когда оси координатъ перпендикулярны другъ къ другу (какъ у насъ на чертежѣ), онѣ назыв. прямоугольными осями (или ортогональными).

Подобными кривыми часто выражаются для наглядности законы измѣненія различныхъ величинъ, разматриваемыхъ въ физикѣ; напр., измѣненіе упругости водяного пара при измѣненіи температуры, измѣненіе атмосфернаго давленія въ данномъ мѣстѣ съ теченіемъ времени, и т. п.

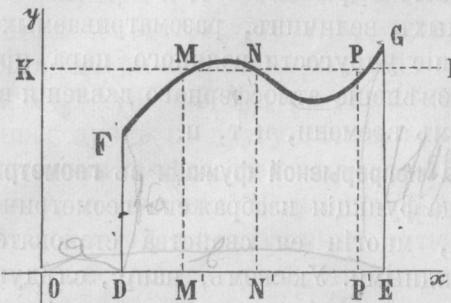
35. Нѣкоторыя свойства непрерывной функции въ геометрическомъ представленіи. Когда функция изображена геометрически посредствомъ кривой, многія ея свойства становятся наглядными и почти очевидными. Укажемъ, напр., слѣдующія 2 свойства непрерывной функции:

1) Если функция непрерывна въ нѣкоторой области аргумента и на границахъ этой области имѣеть противоположные знаки, то она обращается въ нуль внутри этой области (одинъ или нѣсколько разъ). Напр., функция $y = x^3 - 2x + 1$, которую мы изобразили на чертежѣ 4-мъ, непрерывна въ области аргумента $(-2, +2)$ и на границахъ этой области имѣеть противоположные знаки (при $x = -2$ функция равна -3 , при $x = +2$ она равна $+5$); въ такомъ случаѣ она должна обратиться въ нуль внутри области $(-2, +2)$. Дѣйствительно, кривая, изображающая нашу функцию, при непрерывномъ измѣненіи абсциссы отъ значенія -2 до значенія $+2$, должна, не прерываясь, перейти изъ части плоскости, лежащей ниже оси x -въ, въ часть плоскости, лежащую выше ея (отъ ординаты $BM = -3$ къ ординатѣ $DR = +5$); при этомъ она, конечно, пересѣтъ ось x -въ (одинъ или нѣсколько разъ), и, слѣд., ордината ея, а значитъ, и сама функция, обратится въ нуль внутри рассматриваемой области аргумента.

2) Если функция $f(x)$ непрерывна въ области аргумента (a, b) и на границахъ этой области имѣеть неравныя значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, каково бы ни было число C , промежуточное

между A и B , существует по крайней мѣрѣ однотакое число c , промежуточное между a и b , при которомъ $f(c)=C$.

Для разъясненія этого свойства обратимся къ чертежу 5-му. Пусть $OD=a$, $OE=b$, $DF=f(a)=A$, $EG=f(b)=B$ и непрерывная кривая $FMNP$ представляетъ собою непрерывную функцию $f(x)$ въ области аргумента (a, b) . Пусть $DF \neq EG$, напр., пусть $DF < EG$.



Черт. 5.

Возьмемъ любое число C , удовлетворяющее неравенству: $A < C < B$. Отложимъ отрѣзокъ $OK=C$ и проведемъ $KL \parallel Ox$. Такъ какъ $DF < OK < EG$, то прямая KL пройдетъ выше точки F и ниже точки G и, слѣд., она непремѣнно пересѣтъ (одинъ или нѣсколько разъ) непрерывную кривую, идущую отъ точки F къ точкѣ G (у настъ на чертежѣ прямая KL пересѣкаетъ кривую 3 раза). Пусть точка M будетъ одна изъ точекъ пересѣченія прямой KL съ кривою. Очевидно, что абсцисса этой точки OM' выражается числомъ c , промежуточнымъ между a и b , а ордината MM' равна взятому нами числу C , промежуточному между A и B .

Это свойство функции $f(x)$, непрерывной въ области аргумента (a, b) показываетъ намъ, что когда аргументъ непрерывно возрастаетъ отъ a до b , функция $f(x)$, измѣняясь непрерывно отъ значенія $f(a)$ до значенія $f(b)$, переходитъ (одинъ разъ или нѣсколько) черезъ всѣ значения, какъ соизмѣримыя, такъ и несоизмѣримыя, промежуточныя между $f(a)$ и $f(b)$.

Функция показательная и логарифмическая.

36. Показательная функция. Функция a^x , въ которой a есть постоянное положительное число, не равное 1, а

x — переменное число, способное принимать всевозможныя значенія, какъ рациональныя, такъ и иррациональныя, наз., какъ мы уже говорили, показательной функцией. Главнѣйшія свойства этой функции мы разсмотрѣли раньше (§ 13). Эти свойства слѣдующія:

1) При всякомъ вещественномъ значеніи x функция a^x есть число положительное.

2) Если $a > 1$, то $a^x > 1$ при x положительномъ и $a^x < 1$ при x отрицательномъ (обратно при $a < 1$).

3) Если $a > 1$, то при возрастаніи x функция a^x возрастаетъ (убываетъ при $a < 1$).

4) Если x стремится къ 0, то пред. $a^x=1$.

Укажемъ теперь еще слѣдующія 2 свойства показательной функции:

5) Функция a^x непрерывна для всякаго значенія аргумента.

Дѣйствительно: 1) при всякомъ значеніи x , какъ рациональномъ, такъ и иррациональномъ, эта функция, какъ мы видѣли, имѣть одно опредѣленное вещественное конечное значеніе (при условіи, въ случаѣ дробнаго значенія x , рассматривать только одно ариѳметическое значеніе радиала); 2) приращеніе этой функции, соотвѣтствующее приращенію аргумента, начиная отъ любого его значенія $x=x_1$, на положительное или отрицательное число h , равно:

$$a^{x_1+h} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^h - 1)$$

Такъ какъ a^{x_1} есть число конечное, а степень a^h , при h безконечно маломъ, стремится къ 1, то правая часть этого равенства, а слѣд. и его лѣвая часть, есть число безконечно малое при h безконечно маломъ.

6) Если x , оставаясь положительнымъ, неограниченно увеличивается, то, при $a > 1$, a^x тоже неограниченно увеличивается.

Для показанія этого возьмемъ геометрическую бесконечную прогрессію:

$$a^1, a^2, a^3, \dots, a^n, a^{n+1}, \dots$$

Когда $a > 1$, то эта прогрессия возрастающая, и тогда, какъ извѣстно изъ алгебры, какъ бы велико ни было данное число A , мы всегда можемъ найти въ этой прогрессии, при достаточномъ удаленіи отъ начала ряда, такой членъ a^n , который будетъ больше A . Если въ выраженіи a^x показатель x , увеличиваясь неограниченно, сдѣлается большимъ n , то, согласно свойству 3-му, $a^x > a^n$ и слѣд., подавно, $a^x > A$; а это значитъ, что a^x возрастаетъ неограниченно.

Это свойство условно выражаютъ такимъ равенствомъ: $a^{+\infty} = +\infty$

7) Если x , оставаясь отрицательнымъ, неограничено увеличивается по абсолютной величинѣ, то, при $a > 1$, a^x стремится къ 0.

Если x есть отрицательное число, у котораго абс. величина x_1 , то $a^x = a^{-x_1} = \frac{1}{a^{x_1}}$; когда x_1 неограничено увеличивается, тогда, по доказанному, a^{x_1} тоже неограничено увеличивается, а потому дробь $\frac{1}{a^{x_1}}$, равная a^x , стремится къ 0.

Это свойство условно выражается равенствомъ: $a^{-\infty} = 0$.

Если $a < 1$, то выводы будутъ обратны указаннымъ въ двухъ послѣднихъ свойствахъ. Дѣйствительно, если $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$ и тогда, по доказанному, $\left(\frac{1}{a}\right)^{\infty} = \infty$ и $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\infty} = 0$,

т.-е. $\frac{1}{a^{\infty}} = \infty$ и $\frac{1}{a^{-\infty}} = 0$; откуда: $a^{\infty} = 0$ и $a^{-\infty} = \infty$.

Для наглядности изобразимъ найденные результаты въ такихъ таблицахъ:

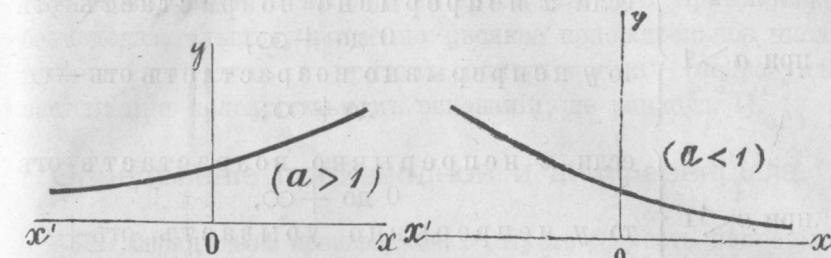
При $a > 1$

x	$-\infty$	возрастаетъ	0	возрастаетъ	$+\infty$
a^x	0	возрастаетъ	1	возрастаетъ	$+\infty$

При $a < 1$

x	$-\infty$	возрастаетъ	0	возрастаетъ	$+\infty$
a^x	$+\infty$	убываетъ	1	убываетъ	0

На чертежѣ процессъ измѣненія показательной функции $y = a^x$ выражается приблизительно такими кривыми:



Черт. 6.

Черт. 7.

37. Логарифмическая функция. Такъ называется функция $y = \log_a x$, представляющая собою логарифмъ переменного независимаго числа x , взятый по основанию a , которое предполагается числомъ постояннымъ, положительнымъ, не равнымъ 1. Всѣ свойства этой функции легко выводятся изъ свойствъ показательной функции, такъ какъ, если $y = \log_a x$, то, согласно опредѣленію логарифма, $x = a^y$, и обратно: если $x = a^y$, то $y = \log_a x$, т.-е. 2 уравненія съ двумя неизвѣстными x и y :

$$y = \log_a x \text{ и } x = a^y$$

равносильны. Разматривая второе изъ этихъ уравненій, мы, на основаніи извѣстныхъ намъ свойствъ показательной функции, можемъ утверждать, что:

при $a > 1$ $\begin{cases} \text{если } y \text{ непрерывно возрастаетъ отъ} \\ \text{---} \infty \text{ до } +\infty, \\ \text{то } x \text{ непрерывно возрастаетъ отъ} \\ 0 \text{ до } +\infty; \end{cases}$

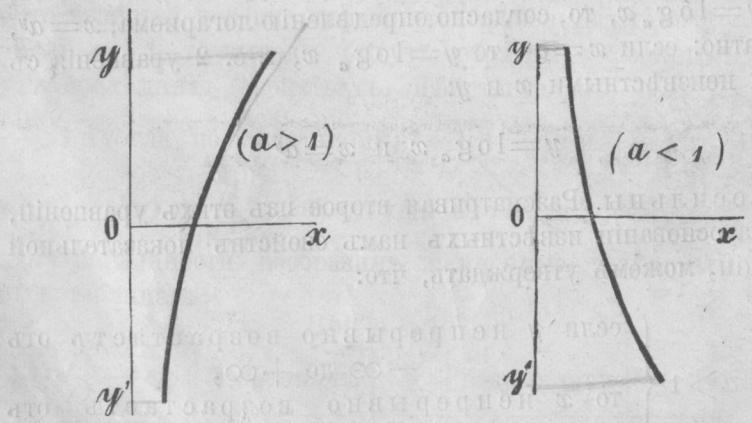
при $a < 1$ $\begin{cases} \text{если } y \text{ непрерывно возрастаетъ отъ} \\ \text{---} \infty \text{ до } +\infty, \\ \text{то } x \text{ непрерывно убываетъ отъ } +\infty \\ \text{до } 0. \end{cases}$

Отсюда заключаемъ, что въ равносильномъ уравненіи $y=\log_a x$

- | | |
|-------------|--|
| при $a > 1$ | если x непрерывно возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$,
то y непрерывно возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$; |
| при $a < 1$ | если x непрерывно возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$,
то y непрерывно убываетъ отъ $+\infty$ до $-\infty$. |

Значитъ, логарифмическая функция $y=\log_a x$ непрерывна для области аргумента $(0, +\infty)$ и въ этой области, при $a > 1$, она возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, а при $a < 1$, убываетъ отъ $+\infty$ до $-\infty$.

На чертежѣ процессъ измѣненія логарифмической функции выражается приблизительно такими кривыми:



Черт. 8.

Черт. 9.

Изъ того, что функция $y=\log_a x$ непрерывна для области аргумента $(0, +\infty)$, заключающей въ себѣ всѣ возможныя положительныя значения его, непосредственно слѣдуетъ, что всякому положительному значенію аргумента x соотвѣт-

ствуетъ одно определенное конечное вещественное значеніе функции y ; мы получаемъ такимъ образомъ то свойство логарифмовъ, которое въ элементарной алгебрѣ принималось безъ доказательства, а именно: „всякое положительное число имѣеть логариѳмъ и притомъ единственный“ (подразумѣвается: при положительному основаніи, не равномъ 1).

Определеніе производной и дифференціала.

38. Определеніе производной. 1⁰. Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция для значенія аргумента $x=a$. Дадимъ этому значенію положительное или отрицательное приращеніе h ; тогда функция получить соотвѣтствующее приращеніе $f(a+h)-f(a)$. Возьмемъ отношеніе приращенія функции къ приращенію аргумента:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad [1]$$

Предположимъ, что h стремится къ 0; тогда, согласно определенію непрерывности, приращеніе функции тоже стремится къ 0; при этомъ, какъ мы увидимъ далѣе на примѣрахъ, отношеніе [1] можетъ стремиться къ определенному предѣлу.

Предѣльъ этотъ, если онъ существуетъ, наз. производной (функцией) отъ функции $f(x)$ при $x=a$.

Если случится, что этотъ предѣльъ существуетъ только тогда, когда h стремится къ 0, оставаясь положительнымъ, или только тогда, когда h стремится къ 0, оставаясь отрицательнымъ, то говорятьъ, что функция $f(x)$ при $x=a$ имѣеть производную только въ одну сторону (въ сторону возрастанія аргумента или въ сторону его убыванія). Если случится, что этотъ предѣльъ существуетъ какъ при h положительному, такъ и при h отрицательному, но первый предѣльъ не равенъ второму, то говорятьъ, что $f(x)$ при $x=a$ имѣеть двѣ различные производные. Если же окажется, что эти двѣ производныя равны другъ другу, то тогда просто говорятьъ, что при $x=a$ функция $f(x)$ имѣеть производную (подразумѣвается: одну и ту же при h положительному и отрицательному).

2º. Говорить, что функция $f(x)$ имъеть производную въ области аргумента (a, b) , если для каждого значенія x , заключающагося между a и b , она имъеть производную, и для крайнихъ значеній a и b имъеть производныя по крайней мѣрѣ въ одну сторону: для $x=a$ въ сторону возрастанія аргумента и для $x=b$ въ сторону его убыванія.] Эта производная вообще мѣняется съ измѣненіемъ x (между a и b) и, слѣд., она есть нѣкоторая функция отъ x . Ее обыкновенно обозначаютъ *), помѣщая знакъ ('') надъ обозначеніемъ самой функции; такъ, если функция обозначена $f(x)$, то ея производная выражается $f'(x)$, если функция обозначена y , или u , или v ..., то ея производная будетъ y' , u' , v' ..., Наконецъ, если функция не только обозначена, но дана въ видѣ какого-нибудь алгебраического выраженія, то ея производную можно обозначить, заключивъ это выражение въ скобки и поставивъ надъ ними знакъ'. Напр., если дана функция $(3+2\sqrt{x})$, то ея производную можно обозначить $(3+2\sqrt{x})'$.

Такимъ образомъ, опредѣленіе производной отъ функции $y=f(x)$, можетъ быть выражено слѣдующимъ равенствомъ:

$$\text{производная } (y', f'(x)) = \text{пред.} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]_{h=0}$$

Если производная $f'(x)$ есть функция непрерывная въ нѣкоторой области аргумента, то она сама можетъ имъеть производную въ этой области; такая производная по отношенію къ начальной функции $f(x)$ наз. второю производною и обозначается $f''(x)$, или y'', u'', v'' и т. д. Вторая производная въ свою очередь можетъ имъеть производную; это будетъ третья производная отъ $f(x)$; она обозначается $f'''(x)$ или y''', u''' и т. д..

Примѣръ. Функция $y=Ax^n$, где A и n постоянныя числа, при чмъ n число цѣлое положительное, непрерывна, какъ мы видѣли ($\S 31_1$) въ области аргумента $(-\infty, +\infty)$. Ея производная для всякаго значенія x есть

*) Такое обозначеніе введено великимъ французскимъ математикомъ Лагранжемъ (1736—1813).

$$y' = \text{пред.} \left[\frac{A(x+h)^n - Ax^n}{h} \right]_{h=0}$$

$$\text{Но } A(x+h)^n = A \left| x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{n-2} + \dots + h^n \right|$$

$$\text{Слѣд. } \frac{A(x+h)^n - Ax^n}{h} = Anx^{n-1} + A \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h x^{n-2} + \dots + Ah^{n-1}$$

Всѣ члены этого многочлена, кроме первого, содержать множителя h и, слѣд., при безконечно маломъ h (положительномъ или отрицательномъ) суть числа безконечно малыя; а потому предѣль многочлена равенъ его первому члену, т.-е.

$$y' = (Ax^n)' = nAx^{n-1}.$$

Этотъ результатъ полезно запомнить, такъ какъ онъ намъ пригодится впослѣдствіи; его можно высказать такъ:

Правило. Чтобы получить производную отъ одночлена Ax^n (при n цѣломъ положительномъ) для любо-го значенія x , достаточно коэффиціентъ его умножить на показателя аргумента, а этого по-казателя уменьшить на единицу.

$$\text{Напр.: } (3x^2)' = 6x, (5ax^3)' = 15ax^2 \text{ и т. п.}$$

Замѣчаніе. Непрерывность функции $f(x)$ есть необходимое, но не достаточное, условіе для того, чтобы эта функция имѣла производную, такъ какъ доказано существованіе и такихъ непрерывныхъ функций, которая не имѣютъ производныхъ не только для частныхъ значеній аргумента, но даже ни при какомъ его значеніи.

39. Слѣдствія. Изъ опредѣленія производной слѣдуетъ:

1º. Если функция $f(x)$ при всѣхъ значеніяхъ x , принадлежащихъ области (a, b) , сохраняетъ одно и то же значеніе (есть число постоянное), то ея производная для этой области равна 0, такъ какъ приращеніе такой функции равно 0 для всякаго значенія x , принадлежащаго области (a, b) .

2º. Всякое постоянное число можно рассматривать, какъ такую функцию, которая при всѣхъ значеніяхъ аргумента сохра-

няеть одно и то же значение, равное этому постоянному числу; поэтому производная от постоянного числа равна 0.

3º. Если $y=x$, то $y'=1$, т.-е. производная самого аргумента равна 1, такъ какъ въ этомъ случаѣ приращеніе функции есть въ то же время и приращеніе аргумента.

40. Определение дифференциала. До сего времени мы обозначали приращеніе аргумента одною какою-нибудь буквою; напр., буквою h , и не вводили никакого особаго обозначенія для приращенія функции, выражая его такъ: $f(x+h)-f(x)$. Въ дальнѣйшемъ изложениіи мы будемъ болѣе частью поступаютъ такъ же; но иногда удобнѣе пользоваться особымъ, условнымъ, обозначеніемъ приращеній, а именно: приращеніе и аргумента, и функции обозначаются греческою буквою Δ (дельта), поставленною передъ обозначеніемъ аргумента или передъ обозначеніемъ функции. Такъ, Δx означаетъ: „приращеніе x “, $\Delta f(x)$, или Δy означаетъ: „приращеніе функции $f(x)$ “, или „приращеніе функции y “. Значитъ, въ такихъ выраженіяхъ буква Δ означаетъ не множителя, а слово „приращеніе“. Если хотятъ указать, что приращеніе дается аргументу, начиная отъ его значенія $x=x_0$, то пишутъ: Δx_0 ; тогда соответствующее приращеніе функции выразится $\Delta f(x_0)$. или болѣе подробно:

$$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

Пользуясь этими обозначеніями,, мы можемъ написать:

$$\text{пред. } \left[\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \right]_{\Delta x_0=0} = f'(x_0) \quad [1]$$

Когда отношеніе $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0}$ не достигло своего предѣла, а только къ нему стремится, то разность между этимъ перемѣннымъ отношеніемъ и его предѣломъ есть нѣкоторое безконечно малое, положительное или отрицательное, число α , и потому можно написать:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = f'(x_0) + \alpha \quad [2]$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на Δx_0 , получимъ:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x_0 + \alpha \cdot \Delta x_0 \quad [3]$$

Такимъ образомъ, приращеніе функции представляеть со-бою алгебраическую сумму двухъ слагаемыхъ; первое изъ нихъ равно произведенію производной на приращеніе аргу-ментата, второе есть произведеніе приращенія аргумента на безконечно малое число.

Если $f'(x_0)$ не равно 0, то изъ этихъ двухъ слагаемыхъ первое имѣетъ преобладающее зна-ченіе и тѣмъ болѣе преобладающее, чѣмъ ближе Δx_0 къ 0. Для показанія этого сравнимъ полное приращеніе функции съ первымъ слагаемымъ а потомъ со вторымъ:

1º. Отношеніе приращенія функции къ первому слагаемому есть

$$\frac{f'(x_0) \cdot \Delta x_0 + \alpha \cdot \Delta x_0}{f'(x_0) \cdot \Delta x_0} = 1 + \frac{\alpha}{f'(x_0)} \quad [4]$$

Когда Δx_0 стремится къ 0, число α также стремится къ 0, а $f'(x_0)$ остается безъ измѣненія; слѣд., если $f'(x_0)$ не равно нулю, дробь $\frac{\alpha}{f'(x_0)}$ стремится къ 0 одновременно съ Δx_0 , и потому предѣлъ отношенія [4] есть 1; а это значитъ, что по мѣрѣ приближенія Δx_0 къ 0 приращеніе функции стремится къ равенству съ однимъ первымъ слагаемымъ суммы [3].

2º. Отношеніе приращенія функции ко второму слагаемому суммы [3] выражается такъ:

$$\frac{f'(x_0) \Delta x_0 + \alpha \Delta x_0}{\alpha \Delta x_0} = \frac{f'(x_0)}{\alpha} + 1$$

Такъ какъ $f'(x_0)$ есть число постоянное, вообще не рав-ное 0, а α есть число безконечно малое, то дробь $\frac{f'(x_0)}{\alpha}$ есть число безконечно большое; а это показываетъ, что, по мѣрѣ того, какъ Δx_0 стремится къ 0, второе слагаемое суммы [3] составляеть все меньшую и меньшую часть полнаго приращенія функции.

Преобладающая часть приращенія функції, равная произведению производной на бесконечно малое приращение аргумента, наз. дифференциаломъ функції и обозначается буквою d , поставленною передъ обозначеніемъ функції; такъ, если функція обозначена черезъ $f(x)$ или y , то дифференциалъ ея обозначается $df(x)$ или dy (въ такихъ выражениихъ, слѣд., буква d означаетъ не множителя, а слово „дифференциалъ“). Такимъ образомъ:

$$dy = y' \Delta x \text{ или } df(x) = f'(x) \Delta x \quad [5]$$

Примѣняя это равенство къ самой перемѣнной независимой x , отъ которой производная равна 1, получимъ:

$$dx = 1. \Delta x = \Delta x$$

т.-е. дифференциалъ аргумента равенъ бесконечно малому приращенію аргумента. Тогда равенство [5] можно переписать такъ:

$$dy = y' dx \text{ или } df(x) = f'(x) dx$$

$$\text{Откуда: } \frac{dy}{dx} = y' \text{ или } \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

т.-е. производную функції можно рассматривать, какъ частное отъ дѣленія дифференциала функції на дифференциалъ аргумента. Поэтому очень часто производная отъ функцій y , u , v ..., зависящихъ отъ аргумента x , обозначается такъ:*

$$\frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \dots$$

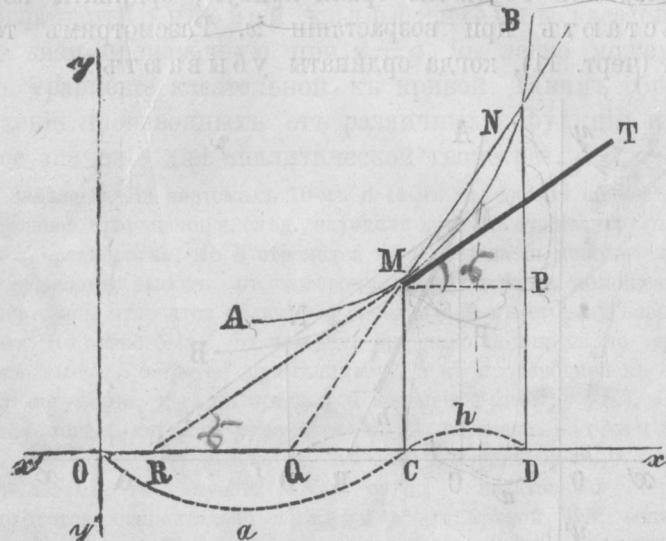
Нахожденіе производныхъ, а слѣд. и дифференциаловъ, различныхъ функцій и примѣненіе ихъ ко многимъ вопросамъ математики входитъ въ курсъ такъ называемаго дифференциального исчислениія, съ началами котораго мы ознакомимся въ этой книгѣ.

Дифференцировать данную функцію значитъ найти ея дифференциалъ и, слѣд., прежде всего ея производную.

*). Такое обозначеніе было введено знаменитымъ нѣмецкимъ математикомъ Лейбницемъ (1646—1716).

Геометрическое и механическое значение производной.

41. Соотношеніе между производной и касательной. Пусть AB (черт. 10) есть кривая, изображающая данную непрерывную функцію $f(x)$ вблизи какого-нибудь ея значенія $f(a)$.



Черт. 10.

Возьмемъ на ней точку M , соответствующую абсциссѣ $x = OC = a$; тогда ея ордината MC должна быть равна $f(a)$. Дадимъ абсциссѣ a некоторое положительное приращеніе $CD = h$; тогда на кривой получимъ новую точку N , абсцисса которой равна $OD = a + h$ и ордината $ND = f(a + h)$. Проведемъ прямую $MP \parallel Ox$ и съкущую MN . Тогда, какъ видно изъ чертежа:

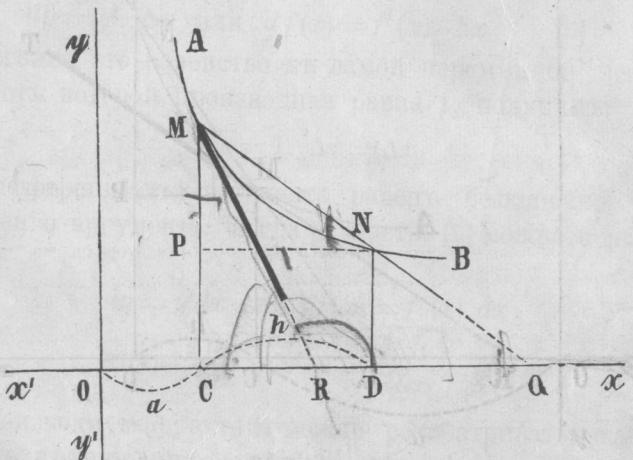
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{NP}{MP} = \operatorname{tng} NMP = \operatorname{tng} NQx \quad [1]$$

Когда h стремится къ 0, тогда N безгранично приближается къ M , и съкущая MN стремится къ предельному положенію, а именно къ касательной MT , проведенной къ кривой AB черезъ точку M ; поэтому уголъ NQx имѣть предельный уголъ TRx , составленный касательной съ полуосью Ox .

Такъ какъ равенство [1] остается вѣрнымъ при всякомъ h , какъ бы мало оно ни было, то изъ него выводимъ:

$$\text{пред. } \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right]_{h=0} = \text{пред. } \operatorname{tng} NQx = \operatorname{tng} TRx \\ \text{т.-е. } f'(a) = \operatorname{tng} TRx$$

На чертежѣ 10-мъ мы брали кривую, ординаты которой возрастаютъ при возрастаніи x . Рассмотримъ теперь случай (черт. 11), когда ординаты убываютъ.



Черт. 11.

Пусть $OC=a$, $MC=f(a)$, $CD=h$ и $ND=f(a+h)$; тогда:

$$f(a+h)-f(a)=ND-MC=-MP$$

и слѣд. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{MP}{NP} = -\operatorname{tng} MNP = -\operatorname{tng} MQO$

Когда h стремится къ 0, сѣкущая MN стремится къ касательной MR и слѣд.:

$$f'(a) = \text{пред. } \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\operatorname{tng} MRO$$

Углы MRO и MRx составляютъ вѣ суммѣ $2d$; слѣд., тангенсы ихъ равны, но противоположны по знаку; поэтому:

$$f'(a) = \operatorname{tng} MRx$$

т.-е. и вѣ этомъ случаѣ производная равна тангенсу угла, составленного касательной съ полуосью Ox .

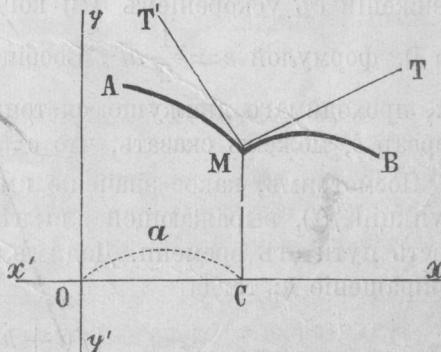
59 — *Графикъ касательной*
— $f(a) = f(a) \cdot (a-a)$ —

Такимъ образомъ, когда функция $f(x)$ изображена кривою, производная отъ этой функции, при $x=a$, равна тангенсу угла, составленного съ полуосью Ox касательной къ кривой, проведенной черезъ ту же точку, у которой абсцисса есть a .

Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, тангенсъ такого угла есть угловой коэффиціентъ касательной. Слѣд., зная производную при $x=a$, мы легко можемъ составить уравненіе касательной къ кривой. Такимъ образомъ нахожденіе производныхъ отъ различныхъ функций имѣть большое значеніе для аналитической геометріи.

42. Замѣчаніе. На чертежахъ 10-мъ и 11-мъ мы давали абсциссъ $x=a$ положительное приращеніе и, слѣд., находили предѣль отношенія $f(a+h)-f(a)$ къ h , предполагая, что h стремится къ 0, оставаясь положительнымъ. Такимъ образомъ выводъ, къ которому мы пришли съ помощью двухъ этихъ чертежей, относится только къ производной вѣ сторону возрастанія аргумента. Но легко было бы показать при помощи такихъ же чертежей, что этотъ выводъ остается примѣнимъ и къ производной вѣ сторону убыванія аргумента, т.-е. къ предѣлу отношения $f(a+h) : f(a)$, который получится тогда, когда h стремится къ 0, оставаясь отрицательнымъ. Разница будетъ только та, что если h стремится къ 0, оставаясь положительнымъ, то сѣкущая MN и, слѣд., и касательная (черт. 10 и 11) проводятся относительно правой вѣтви кривой MB ; если же h стремится къ 0, оставаясь отрицательнымъ, то сѣкущая и касательная проводятся относительно лѣвой вѣтви кривой MA .

Вообще говоря для данного значения $x=a$ производная вѣ сторону возрастанія аргумента равна производной вѣ сторону убыванія аргумента и, слѣд., касательная къ правой вѣтви кривой MB совпадаетъ съ касательной къ лѣвой вѣтви MA . Но такъ бываетъ не всегда. Напр., на чертежѣ 12-мъ изображена кривая AB и на ней точка M (принадлежащая къ тѣкъ называемымъ особеннымъ точкамъ) такая, что касательная MT къ вѣтви MB не составляетъ продолженія касательной MT' къ вѣтви MA , а образуетъ съ нею некоторый уголъ, не равный 180° . Если эта кривая выражаетъ собою



Черт. 12.

нѣкоторую функцию $f(x)$, то такая функция при $x=CO=a$ имѣть двѣ производные: одну справа (равную тангенсу угла, образованного MT съ положительнымъ направлениемъ оси x -овъ), другую слѣд., равную тангенсу угла, образованного MT' съ тѣмъ же направлениемъ оси x -овъ.

43. Частные случаи. Если окажется, что $f'(a)=0$, то это значитъ, что тангенсъ угла, составленного касательно съ положительнымъ направлениемъ оси x -овъ, равенъ нулю, слѣд., равенъ нулю и самъ уголъ, а потому касательная, проведенная къ кривой черезъ точку съ абсциссою a , параллельна оси x -овъ.

2º. Можетъ случится, что при нѣкоторомъ значеніи аргумента $x=a$ производная $f'(x)$ перестаетъ существовать, обращаясь въ $\pm\infty$. Это значитъ, что по мѣрѣ приближенія x къ a абсолютная величина производной безпредѣльно возрастаетъ. Въ геометрическомъ смыслѣ это надо понимать такъ, что касательная къ кривой, проведенная черезъ точку съ абсциссой a , перпендикулярна къ оси x -овъ (тангенсъ прямого угла, какъ известно, равенъ $\pm\infty$).

44. Соотношение между производной и скоростью. При движении материальной точки величина пути, пройденного ею за время t , конечно, есть нѣкоторая непрерывная функция этого времени. Напр., какъ известно изъ механическаго отдѣла физики, величина e пути, пройденного въ теченіи t секундъ, выражается: при равномѣрномъ движении со скоростью v формулой $e=vt$, а при равномѣрно ускорительномъ движении съ ускореніемъ a и когда начальная скорость равна 0, формулой $e=\frac{1}{2}at^2$. Вообще, обозначая величину пути, проходимаго движущеюся точкой въ теченіи t секундъ, черезъ e , можемъ сказать, что $e=f(t)$.

Посмотримъ, какое значение имѣть производная $f'(t)$, отъ функции $f(t)$, выражающей для нѣкотораго движениіа зависимость пути отъ времени. Дадимъ времени t бесконечно малое приращеніе h ; тогда

$$f'(t)=\text{пред.} \left[\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right]_{h=0}$$

Разность $f(t+h)-f(t)$ означаетъ путь, проходимый движущеюся точкою за промежутокъ времени h , слѣдующій за концомъ t -ї секунды. Поэтому, мы можемъ сказать, что частное $[f(t+h)-f(t)] : h$ означаетъ среднюю скорость движения за этотъ промежутокъ времени. Предѣль, къ которому стремится средняя скорость, когда промежутокъ времени h стремится къ 0, есть мѣра истинной скорости (или просто скорости) въ концѣ t -ї секунды. Обозначая эту скорость черезъ v_t , будемъ, слѣд., имѣть:

$$v_t=\text{пред.} \left[\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right]_{h=0}=f'(t).$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему важному заключенію: производная отъ пути, рассматриваемаго, какъ функция времени, для данного значенія t этого времени, равна скорости движения въ此刻ъ, соответствующій этому значенію времени.

Напр., скорость v_t равномѣрно ускорительного движения, котораго путь опредѣляется формулой: $e=\frac{1}{2}at^2$, равна производной отъ функции $\frac{1}{2}at^2$. Эта производная, какъ мы видѣли (§ 38), должна быть $\frac{1}{2}a \cdot 2t^{2-1}=at$; значитъ, $v_t=at$, что действительно, какъ мы знаемъ изъ механики, выражаетъ скорость равномѣрно ускорительного движения.

Мы видимъ такимъ образомъ, что умѣнье находить производные отъ данныхъ функций имѣть большое значеніе для механики, такъ какъ оно позволяетъ для всякаго движения находить зависимость между скоростью и временемъ, если известна зависимость между величиною пройденного пути и временемъ.

Перейдемъ теперь къ указанію способовъ находить производные (а слѣд. и дифференциалы) отъ разныхъ функций.

Производная отъ суммы, произведенія, частнаго, степени и корня.

45. Предварительное замѣчаніе. Для избѣжанія лишнихъ повтореній замѣтимъ разъ на всегда, что функции, о которыхъ говорится въ теоремахъ этой главы, предполагаются непрерывными функциями отъ одной и той же переменной независимой x и имѣющими производные для того значенія x , или для тѣхъ значеній x , которые разумѣются въ теоремахъ.

46. Теорема I (производная отъ суммы). Производная отъ алгебраической суммы нѣсколькихъ функций равна алгебраической суммѣ производныхъ слагаемыхъ.

Такъ, если:

$$y = u + v - w$$

то

$$y' = u' + v' - w'$$

Док. Пусть x получаетъ нѣкоторое приращеніе Δx ; тогда функции u , v , w и y получать соотвѣтствующія приращенія Δu , Δv , Δw и Δy . Не трудно понять, что

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

и слѣд.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Такъ какъ предѣлъ алгебраической суммы переменныхъ чиселъ, стремящихся къ предѣламъ, равенъ алгебраической суммѣ этихъ предѣловъ, то, когда Δx стремится къ 0:

$$\text{пред. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{пред. } \frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{пред. } \frac{\Delta v}{\Delta x} - \text{пред. } \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

т.-е.

$$y' = u' + v' - w'$$

Слѣдствіе. Если двѣ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, для всѣхъ значеній x , принадлежащихъ области (a, b) , разнятся между собою на какое-нибудь постоянное число C (или равны другъ другу), то ихъ производные для этой области равны. Дѣйствительно, если для всѣхъ значеній x , принадлежащихъ

области (a, b) , будетъ имѣть мѣсто равенство $f(x) = \varphi(x) + C$ (въ частномъ случаѣ C можетъ быть 0), то значитъ для этой области разность $f(x) - \varphi(x)$ равна постоянному числу C ; но тогда производная отъ функции $f(x) - \varphi(x)$ должна равняться 0 ($\S 39,1$); а эта производная есть $f'(x) - \varphi'(x)$; если же $f'(x) - \varphi'(x) = 0$, то $f'(x) = \varphi'(x)$.

47. Теорема II (производная отъ произведенія). Производная отъ произведенія нѣсколькихъ функций равна суммѣ произведеній, полученныхъ отъ умноженія производной каждой изъ функций на произведеніе всѣхъ остальныхъ функций; т.-е.

если $y = uvw\dots$, то

$$y' = u'vw\dots + u'vw\dots + w'u\dots + \dots$$

Док. 1^o. Возьмемъ сначала произведеніе только двухъ функций: $y = uv$ и пусть Δy , Δu , Δv будутъ приращенія функций, соотвѣтствующія приращенію аргумента x на Δx . Тогда:

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$$

Раздѣливъ обѣ части этого равенства на Δx , найдемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$$

Отсюда видно, что когда Δx стремится къ 0, то тогда:

$$\text{пред. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{пред. } v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \text{пред. } u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \text{пред. } \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$$

Такъ какъ въ послѣднемъ произведеніи $\frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v$ первый множитель стремится къ u' , а второй къ 0, то это произведеніе имѣеть предѣломъ 0, а потому предыдущее равенство даетъ:

$$y' = u'v + v'u$$

Въ частномъ случаѣ, когда одна изъ функций, напр. u , равна постоянному числу a , тогда $u' = 0$ и $y' = av'$, т.-е. производная отъ произведенія постоянного

числа на функцію равна произведенію этого постороннаго числа на производную отъ функции.

2º. Возьмемъ теперь произведеніе 3-хъ множителей $y=uvw$. Разсматривая его, какъ произведеніе только двухъ множителей: $y=(uv)w$, можемъ написать:

$$y' = (uv)'w + u'(uv)$$

Подставляя сюда вмѣсто $(uv)'$ величину $u'v + v'u$, получимъ:

$$y' = (u'v + v'u)w + w'uv = u'vw + v'uw + w'uv$$

Подобнымъ образомъ можно доказать теорему для 4-хъ и болѣе сомножителей.

48. Теорема III (производная отъ дроби). Производная отъ дроби равна другой дроби, у которой числитель есть разность между произведеніемъ производной числителя данной дроби на ея знаменателя и произведеніемъ производной знаменателя данной дроби на ея числителя, а знаменатель равенъ квадрату знаменателя данной дроби; т.-е.

$$\text{если } y = \frac{u}{v}, \text{ то } y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Теорема непримѣнима къ такому значенію аргумента, которое обращаетъ знаменателя v въ 0.

Док. Изъ равенства $y = \frac{u}{v}$ находимъ: $u = yv$

$$\text{и слѣд. } u' = y'v + v'y$$

$$\text{откуда: } y'v = u' - v'y = u' - v'\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v}$$

Если $v \neq 0$, то мы можемъ раздѣлить обѣ части равенства на v ; послѣ дѣленія получимъ:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Въ частномъ случаѣ, когда числитель u есть число постоянное, тогда $u' = 0$ и $y' = -\frac{v'w'}{v^2}$.

49. Теорема IV (производная отъ степени). Производная y' отъ функции $y = u^n$, гдѣ n есть постоянное цѣлое и положительное число, равна

$$y' = n u^{n-1} u'.$$

Док. Теорему эту можно рассматривать, какъ слѣдствіе теоремы II (о производной отъ произведенія), такъ какъ, согласно этой теоремѣ:

если $y = u^n = uuu\dots u$ (n разъ)

$$\text{то } y' = u'u^{n-1} + u'u^{n-1} + \dots + u'u^{n-1} \text{ (n разъ)}$$

$$\text{т.-е. } y' = nu^{n-1} u'$$

Въ частности, когда $y = x^n$, тогда $y' = nx^{n-1}$, что согласно съ правиломъ, которое мы вывели раньше (§ 38) для производной отъ одночлена Ax^n .

50. Теорема V (производная отъ корня). Производная отъ функции $y = \sqrt[n]{u}$, гдѣ n есть постоянное цѣлое положительное число, равна

$$y' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

при условіи, что при n четномъ $u > 0$, а при n нечетномъ $u \neq 0$.

Док. При n четномъ u не должно быть числомъ отрицательнымъ, такъ какъ иначе корень $\sqrt[n]{u}$ не былъ бы вещественнымъ числомъ.

Изъ равенства $y = \sqrt[n]{u}$ находимъ:

$$u = y^n \text{ и слѣд. } u' = ny^{n-1} y'$$

Если y (и слѣд. u) не равно 0, то можно обѣ части послѣдняго равенства раздѣлить на ny^{n-1} ; послѣ дѣленія получимъ:

$$y' = \frac{u'}{ny^{n-1}} = \frac{u'}{n(\sqrt[n]{u})^{n-1}} = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

при условії $u \neq 0$ и при n четномъ $u > 0$.

Слѣдствіе. Если $y = \sqrt{u}$, то $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ при условії $u > 0$.

51. Примѣненіе этихъ теоремъ къ дифференціаламъ. Такъ какъ дифференціаломъ функціи называется произведеніе ея производной на дифференціаль (приращеніе) аргумента [$d f(x) = f'(x) dx$], то всѣ изложенные выше теоремы о производныхъ можно примѣнять къ дифференціаламъ, если только обѣ части равенства, которымъ выражается теорема, умножить на dx . Если, напр., умножимъ на dx обѣ части равенства: $y' = u'v + v'u$, которымъ выражается теорема о производной отъ произведенія, то получимъ:

$$y'dx = u'vdx + v'udx = (u'dx)v + (v'dx)u$$

Такъ какъ $y'dx = dy$, $u'dx = du$ и $v'dx = dv$, то:

$$dy = (du)v + (dv)u$$

Въ словесномъ выраженіи доказанныхъ теоремъ придется тогда вездѣ слово „производная“ замѣнить словомъ „дифференціаль“. Напр., теорема о дифференціалѣ отъ произведенія выразится такъ:

дифференціаль отъ произведенія нѣсколькихъ функцій равенъ суммѣ произведеній, полученныхъ отъ умноженія дифференціала каждой изъ функцій на произведеніе всѣхъ остальныхъ функцій.

52. Примѣры. 1⁰. Пусть y есть цѣлая функція отъ x :

$$y = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m$$

съ вещественными постоянными коэффициентами. Эта функція, какъ мы видѣли (§ 31, 2), непрерывна для всякаго значенія x . Разматривая ее, какъ алгебраическую сумму непрерывныхъ функцій и принимая во вниманіе, что производная отъ одночлена Ax^n равна nAx^{n-1} (§ 38), а производная постоянного числа A_m равна 0, будеть имѣть:

$$y' = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \dots + A_{m-1}$$

Въ частности, если $y = Ax + B$, то $y' = A$;

если $y = Ax^2 + Bx + C$, то $y' = 2Ax + B$ и т. д.

2⁰. Пусть $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$; эта функція (§ 31, 3) непрерывна

для всякаго значенія x , не обращающаго въ 0 знаменателя. Примѣнія къ ней теорему о производной отъ дроби, получимъ (при условії $a'x + b' \neq 0$):

$$y' = \frac{a(a'x + b') - a'(ax + b)}{(a'x + b')^2} = \frac{ab' - a'b}{(a'x + b')^2}$$

Подобно этому, если $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$,

то (при условії $a'x^2 + b'x + c' \neq 0$):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2ax + b)(a'x^2 + b'x + c') - (2a'x + b)(ax^2 + bx + c)}{(a'x^2 + b'x + c')^2} \\ &= \frac{Ax^2 + Bx + C}{(a'x^2 + b'x + c')^2} \end{aligned}$$

гдѣ $A = ab' - a'b$, $B = ac' - a'c$, $C = bc' - b'c$.

3⁰. Пусть $y = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$. Эта функція непрерывна для всякаго вещественнаго значенія x , при которомъ $ax^2 + 2bx + c < 0$. Примѣнія къ ней теорему о производной отъ корня, получимъ при условії $ax^2 + 2bx + c > 0$:

$$y' = \frac{2ax + 2b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Производная отъ функцій: показательной и логарифмической.

53. Теорема. Производная отъ показательной функціи $y = a^x$, для всякаго значенія x равна $a^x \log a$, т. е. равна самой функціи, умноженной на натуральный логариомъ возвышающее го числа.

Док. Дадимъ аргументу, начиная отъ любого его значе-
ния x , приращение h ; тогда приращение функции y , которое
мы обозначимъ черезъ k , будетъ:

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$$

$$\text{и слѣд. } \frac{k}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

Когда h стремится къ 0, число a^x , какъ независящее отъ h , остается постояннымъ; поэтому

$$y' = (a^x)' = \text{пред. } \frac{k}{h} = a^x \text{ пред. } \frac{a^h - 1}{h}$$

Такъ какъ a^h стремится къ 1 (§ 13, 4), то разность $a^h - 1$ есть число бесконечно малое; положивъ $a^h - 1 = \alpha$, получимъ:

$$a^h = 1 + \alpha.$$

Логариюмимъ это равенство по основанию e натураль-
ныхъ логариомовъ:

$$h \log a = \log(1 + \alpha).$$

$$\text{и слѣд. } h = \frac{\log(1 + \alpha)}{\log a}$$

$$\begin{aligned} \text{и } \frac{a^h - 1}{h} &= \frac{\frac{\alpha}{\log(1 + \alpha)}}{\frac{\log a}{\log(1 + \alpha)}} = \frac{\alpha \log a}{\log(1 + \alpha)} = \frac{\log a}{\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha)} \\ &= \frac{\log a}{\log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} \end{aligned}$$

Найдемъ предѣль этой дроби. На основаніи теоремъ о
предѣлахъ (§§ 12 и 15) будеть имѣть:

$$\text{пред. } \frac{\log a}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\log a}{\text{пред. } \log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{\log a}{\log \text{пред. } (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Когда h стремится къ 0, число α тоже стремится къ 0, и
тогда пред. $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$; слѣд.:

$$\text{пред. } \frac{a^h - 1}{h} = \frac{\log a}{\log e}$$

Но $\log e = 1$; поэтому:

$$y' = (a^x)' = a^x \text{ пред. } \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a$$

Слѣдствіе. Одно изъ важныхъ свойствъ числа e состоить
въ томъ, что производная отъ показательной функци-
ціи $y = e^x$ равна самой функции. Дѣйствительно, по-
ложивъ $a = e$, получимъ:

$$y' = (e^x)' = e^x \log e = e^x$$

54. Теорема. Производная отъ логарифмической
функции $y = \log_a x$ для всякаго положитель-
наго значенія x равна $\frac{1}{x \log a}$, т.-е. равна единицѣ,
деленной на взятое значеніе x , умножен-
ное на натуральный логарифмъ основанія.

Док. Дадимъ аргументу, начиная отъ произвольнаго
положительнаго его значенія x (отрицательныя числа
не имѣютъ логариомовъ) бесконечно малое приращение h ;
тогда приращение функции y , которое обозначаемъ черезъ k ,
будеть:

$$k = \log_a(x + h) - \log_a x = \log_a \frac{x + h}{x} = \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

$$\text{Слѣд. } y' = \text{пред. } \frac{k}{h} = \text{пред. } \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

Дробь $\frac{h}{x}$, при h бесконечно маломъ, есть бесконечно ма-
лое число; обозначимъ его α ; тогда

$$\frac{h}{x} = \alpha; \quad 1 + \frac{h}{x} = 1 + \alpha \quad \text{и} \quad h = \alpha x$$

$$\begin{aligned} \text{Слѣд. } y' &= \text{пред. } \frac{\log_a(1 + \alpha)}{\alpha x} = \text{пред. } \frac{\frac{1}{\alpha} \log_a(1 + \alpha)}{x} \\ &= \text{пред. } \frac{\log_a(1 + \alpha)}{x} \end{aligned}$$

Когда h стремится къ 0, число α тоже стремится къ 0 и биномъ $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ имѣеть предѣломъ e : слѣд:

$$y' = (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$$

Но мы видѣли раньше (§ 26), что

$$\log_a e = \frac{1}{\log a}$$

$$\text{Поэтому: } (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

Частный случай: $(\log x)' = \frac{1}{x}$, такъ какъ $\log e = 1$.

Производная отъ сложной и отъ обратной функции, а также отъ функций степенной и показательно-степенной.

55. Понятіе о сложной функции. Пусть y есть нѣкоторая функция $f(u)$ отъ аргумента u , который въ свою очередь есть нѣкоторая функция $\varphi(x)$ отъ переменной независимой x :

$$y = f(u) \quad u = \varphi(x)$$

или

$$y = f[\varphi(x)]$$

Такая функция отъ функции наз. сложной функцией. Напр., скорость v , приобрѣтенная тѣломъ, свободно падающимъ съ высоты h , есть функция этой высоты (а именно $v = \sqrt{2gh}$); съ другой стороны, высота h есть функция времени t , въ теченіе котораго происходило паденіе (а именно $h = \frac{1}{2}gt^2$); значитъ, разсматривая время t , какъ независимую переменную, мы можемъ сказать, что въ этомъ примѣрѣ скорость v выражается, какъ функция отъ функции.

Въ этомъ примѣрѣ данныя функции таковы, что сложную функцию легко преобразовать въ простую (если $v = \sqrt{2gh}$ и

$h = \frac{1}{2}gt^2$, то $v = \sqrt{2g(\frac{1}{2}gt^2)} = \sqrt{g^2t^2} = gt$). Но такое преобразованіе иногда бываетъ невозможно или затруднительно (примѣръ: $y = \log u$, $u = \sin x$). Укажемъ способъ, какъ можно и безъ преобразованія находить производную отъ сложной функции $y = f[\varphi(x)]$, если умѣемъ находить производныя отъ функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

56. Производная отъ сложной функции. Пусть $y = f(u)$ есть функция отъ переменной u , допускающая относительно этой переменной производную $f'(u)$, и $u = \varphi(x)$ есть функция отъ переменной независимой x , допускающая производную $\varphi'(x)$. Требуется найти производную y'_x функции y относительно переменной независимой x .

Дадимъ аргументу x нѣкоторое приращеніе h ; тогда функция $u = \varphi(x)$ получить приращеніе k , равное $\varphi(x+h) - \varphi(x)$, и функция $y = f(u)$ получить приращеніе l , равное $f(u+h) - f(u)$. Найдемъ предѣлъ отношенія $\frac{l}{h}$. Это отношеніе можно представить такъ:

$$\frac{l}{h} = \frac{l}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

Когда h стремится къ 0, обѣ части этого равенства дѣлаются числами переменными, и такъ какъ предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, то

$$\text{пред. } \frac{l}{h} = \text{пред. } \frac{l}{k} \cdot \text{пред. } \frac{k}{h}$$

Пред. $\frac{l}{h}$ есть искомая производная y'_x отъ функции y

относительно x , пред. $\frac{l}{k}$ есть производная $f'(u)$ отъ функции $y = f(u)$, взятая относительно u , и пред. $\frac{k}{h}$ есть производная $\underline{u'} = \varphi'(x)$ функции $u = \varphi(x)$.

Слѣд.

$$y'_x = f'(u) \varphi'(x) = f'(u)u'$$

Правило. Чтобы получить производную от сложной функции, сначала находятъ ея производную, рассматривая зависимый аргументъ, какъ независимый, и затѣмъ умножаютъ ее на производную зависимаго аргумента.

Примѣръ 1-й. $y = \sqrt{au+b}$, $u=x^3$.

Рассматривая переменную u , какъ независимую, получимъ для производной отъ $\sqrt{au+b}$ выражение $\frac{a}{2\sqrt{au+b}}$; слѣд.:
 $y' = \frac{a}{2\sqrt{au+b}} \cdot u' = \frac{a}{2\sqrt{au+b}} \cdot 3x^2 = \frac{3ax^2}{2\sqrt{ax^3+b}}$

То же самое выражение мы получили бы если бы преобразовали сложную функцию y въ простую, что здѣсь легко выполнить:

$$y = \sqrt{ax^3+b} \text{ слѣд. } y' = \frac{3ax^2}{2\sqrt{ax^3+b}}$$

Примѣръ 2-й. $y=a^u$, $u=x^2$ (a число положительное).

$$y'=(a^u \operatorname{Log} a) u'=(a^u \operatorname{Log} a) 2x=2xa^x \operatorname{Log} a.$$

Примѣръ 3-й. $y=\log_a u$, $u=x+\sqrt{x^2+k^2}$ ($u>0$)

$$y'=\frac{1}{u \operatorname{Log} a}, \quad u'=\frac{u'}{u \operatorname{Log} a}$$

$$\text{Но } u'=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+k^2}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}=\frac{\sqrt{x^2+k^2}+x}{\sqrt{x^2+k^2}}$$

$$\text{Слѣд. } y'=\frac{\sqrt{x^2+k^2}+x}{\sqrt{x^2+k^2}(x+\sqrt{x^2+k^2})} \cdot \frac{1}{\operatorname{Log} a}=\frac{1}{\operatorname{Log} a \sqrt{x^2+k^2}}$$

57. Производная отъ степенной функции. Пусть намъ дана степенная функция

$$y=x^m$$

гдѣ x есть переменное положительное число, а m какое угодно постоянное число, рациональное или иррациональное. Для частнаго случая, когда показатель m есть число цѣлое положительное, мы уже умѣемъ находить производную (§ 38)

она равна $y'=mx^{m-1}$. Покажемъ теперь, что эта формула остается вѣрной для всякаго значенія m .

Функцию $y=x^m$, мы можемъ привести къ виду сложной показательной функции такимъ образомъ. Логарифмируемъ ее по основанію e :

$$\operatorname{Log} y=m \operatorname{Log} x; \text{ откуда: } y=e^{m \operatorname{Log} x}$$

Примѣняя теперь правило о сложной функции и теоремы о производныхъ отъ показательной и логарифмической функций (§§ 53, 54), получимъ:

$$(x^m)'=e^{m \operatorname{Log} x} \cdot \frac{m}{x}=y \cdot \frac{m}{x}=x^m \cdot \frac{m}{x}=\underline{\underline{m x^{m-1}}}$$

(*) Если $y=u^m$, гдѣ u есть функция отъ x , имѣющая производную u' , то согласно правилу § 56:

$$(u^m)'=\underline{\underline{m u^{m-1} u'}}$$

58. Производная отъ показательно-степенной функции. Такъ называется функция

$$y=u^v$$

гдѣ u и v суть функции отъ x , имѣющія производныя u' и v' , при чмъ u принимаетъ только положительныя значенія.

Примѣнимъ тотъ же приемъ, какой мы примѣняли только что къ степенной функции, т.-е. превратимъ данную функцию въ сложную показательную такимъ образомъ. Логарифмируя по основанію e , получимъ:

$$\operatorname{Log} y=v \operatorname{Log} u \text{ и слѣд. } y=e^{v \operatorname{Log} u}$$

Откуда находимъ:

$$(u^v)'=e^{v \operatorname{Log} u} \left(v' \operatorname{Log} u + \frac{vu'}{u} \right)=u^v \left(v' \operatorname{Log} u + \frac{vu'}{u} \right)=u^v v' \operatorname{Log} u + vu^{v-1} u'$$

т.-е. производная отъ показательно-степенной функции u^v равна суммъ двухъ производныхъ, изъ которыхъ первая получена въ предположеніи, что основаніе u есть число постоянное, а

вторая въ предположеніи, что показатель v есть число постоянное.

59. Понятіе обѣ обратной функції. Равенство $y=f(x)$ можно разсматривать, какъ уравненіе съ 2 неизвѣстными x и y , рѣшенное относительно y , но не рѣшенное относительно x . Но хотя уравненіе не рѣшено относительно x , тѣмъ не менѣе мы можемъ утверждать, что если дано значеніе y , то уравненіе $y=f(x)$ опредѣляетъ вообще одно или нѣсколько, соотвѣтствующихъ значеній x . Такимъ образомъ изъ этого уравненія слѣдуетъ, что не только y есть функція отъ x , но, и обратно, x есть нѣкоторая (неявная) функція отъ y . Такая функція называется обратной по отношенію къ прямой функціи $y=f(x)$. Обозначимъ ее такъ: $x=F(y)$, гдѣ за переменную независимую надо принимать y^*). Вообще говоря, обратная функція принадлежать къ многозначнымъ, такъ какъ уравненіе $y=f(x)$, рѣшенное относительно x , вообще допускаетъ нѣсколько корней.

60. Производная оть обратной функції. Если обратная функція $F(y)$ по существу своему, или вслѣдствіе принятыхъ дополнительныхъ условій, есть функция однозначная и имѣеть производную, то эту производную можно найти, не зная самой функціи $F(y)$ (и, слѣд., не рѣшая уравненія $y=f(x)$). Для этого найдемъ производную по аргументу x оть обѣихъ частей равенства $x=F(y)$. Производная оть x равна 1; производная оть $F(y)$, гдѣ y есть функція оть x , по правилу сложныхъ функцій, равна $F'(y) \cdot y'$. Но если функціи равны, то равны и ихъ производные (§ 46, слѣдствіе); слѣд.

$$1 = F'(y) \cdot y'; \text{ откуда } F'(y) = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}$$

Подставивъ въ $f'(x)$ на мѣсто x функцию $F(y)$, получимъ:

$$F'(y) = \frac{1}{f' [F(y)]}$$

* Точнѣе говоря, для функціи $f(x)$ обратной служить функція $F(x)$.

Правило. Чтобы найти производную отъ обратной функціи, находятъ сначала производную отъ прямой функціи, затѣмъ подставляютъ въ нее вмѣсто аргумента обратную функцію и, наконецъ, дѣлять 1 на полученный результатъ.

Примѣръ 1-й. Для функціи $y=x^2$ обратной служить $x=\pm\sqrt{y}$. Для устраненія многозначности поставимъ дополнительное условіе: брать радикаль только со знакомъ +. Найдемъ теперь производную отъ функціи \sqrt{y} по правилу обратныхъ функцій. Производная прямой функціи есть $2x$; подставимъ сюда вмѣсто x обратную функцію \sqrt{y} ; получимъ $2\sqrt{y}$; раздѣлимъ 1 на этотъ результатъ:

$$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

или, замѣнивъ букву y на x :

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

что вполнѣ согласно съ теоремой о производной отъ корня (§ 50).

Примѣръ 2-й. Показательной функціи $y=a^x$ соотвѣтствуетъ однозначная и непрерывная обратная функція $x=\log_a y$. Примѣнія къ ней правило обратной функціи, получимъ:

Производная прямой функціи есть.... $a^x \log a$

Замѣни аргумента на обратную функцію

даетъ: $a \cdot \log_a y \log a = y \log a$

$$\text{Слѣд. } (\log_a y)' = \frac{1}{y \log a}$$

или, замѣнивъ y на x :

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

что согласуется съ результатомъ, найденныхъ раньше (§ 54).

Въ слѣдующей главѣ мы будемъ имѣть другіе примѣры обратныхъ функцій.

Производныя отъ тригонометрическихъ и круговыхъ функций.

61. Предварительное замѣчаніе. Ограничимся выводомъ производныхъ отъ слѣдующихъ тригонометрическихъ функций: $\sin x$, $\cos x$, $\tg x$ и $\cotg x$; если бы понадобилось найти производныя отъ $\sec x$ и $\cosec x$, то можно, воспользовавшись равенствами:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cosec x = \frac{1}{\sin x},$$

находить производныя по теоремѣ о производной отъ дроби (§ 48).

Для нахожденія производныхъ отъ $\sin x$ и отъ $\cos x$, предварительно докажемъ слѣдующую вспомогательную истину.

62. Лемма. Когда дуга α стремится къ 0, предѣлъ отношенія $\sin \alpha : \alpha$ равенъ 1.

Док. Изъ тригонометріи известно, что если дуга α заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$$

Раздѣлимъ всѣ члены этого двойного неравенства на $\sin \alpha$:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha}$$

Откуда, раздѣливъ 1 на каждое изъ трёхъ чиселъ послѣдняго неравенства, получимъ:

$$1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha$$

Предположимъ, что α стремится къ 0; тогда $\cos \alpha$ стремится къ 1, поэтому отношеніе $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, заключающееся, какъ видно изъ послѣдняго неравенства, между переменными числами $\cos \alpha$ и его предѣломъ 1, имѣть тотъ же предѣлъ. Такимъ образомъ:

$$\text{пред. } \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)_{\alpha=0} = 1$$

63. Теперь мы можемъ легко найти производныя отъ $\sin x$, $\cos x$, $\tg x$ и $\cotg x$.

1°. $y = \sin x$. Дадимъ аргументу, начиная отъ произвольнаго его значенія x , приращеніе h ; тогда приращеніе y , которое мы обозначимъ k , будетъ:

$$k = \sin(x+h) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}$$

$$\text{и слѣд. } \frac{k}{h} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Когда h стремится къ 0, отношеніе $\sin \frac{h}{2} : \frac{h}{2}$ стремится по доказанному, къ 1, а $\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ имѣть предѣломъ $\cos x$; и такъ какъ предѣлъ произведенія равенъ произведенію предѣловъ, то:

$$\text{пред. } \frac{k}{h} = (\sin x)' = \cos x$$

т.-е производная отъ $\sin x$ для всякаго значенія x равна $\cos x$.

2°. $y = \cos x$. Подобно предыдущему получимъ:

$$k = \cos(x+h) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}$$

$$\text{и слѣд. } \frac{k}{h} = -\frac{2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\text{и пред. } \frac{k}{h} = (\cos x)' = -\sin x$$

т.-е производная отъ $\cos x$ для всякаго значенія x равна $\sin x$, взятому съ обратнымъ знакомъ.

дс

3^o. $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Примѣняя теорему о производной отъ дроби (§ 48), получимъ:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos^2 x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

и, слѣд., также $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ для всякаго значенія x , не равнаго $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, т.-е. для всякаго значенія x , при которомъ $\cos x$ не равенъ 0.

4^o. $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Поступая по предыдущему, получимъ:

$$(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

и, слѣд., также $(\operatorname{cotg}^2 x)' = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$ для всякаго значенія x , не равнаго $k\pi$, т.-е. для всякаго значенія x , при которомъ $\sin x \neq 0$.

Замѣчаніе. Если u есть функція отъ x , допускающая производную u' , то сложныя функціи: $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u$ и $\operatorname{cotg} u$ имѣютъ слѣдующія производныя (согласно правилу сложныхъ функцій):

$$(\cos u).u', (-\sin u).u', \frac{u'}{\cos^2 u}, -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

64. **Круговыя функціи.** Такъ принято называть функціі: $\operatorname{arc} \sin x$ (дуга, у которой синусъ равенъ x), $\operatorname{arc} \cos x$ (дуга, у которой косинусъ равенъ x) и т. п. Эти функціи обратны тригонометрическимъ; поэтому производныя отъ нихъ могутъ быть найдены по правилу обратныхъ функцій (§ 60).

1^o. $y = \operatorname{arc} \sin x$. Такъ какъ абс. величина синуса не можетъ быть больше 1, то эта функція имѣть смыслъ только для области аргумента $(-1, +1)$. Изъ тригонометріи известно, что одному и тому же синусу (вообще одному и тому же значенію какой-нибудь тригонометрической величины) соотвѣтствуетъ безчисленное множество дугъ. Для устраненія

такой многозначности мы условимся подъ выраженіемъ $\operatorname{arc} \sin x$ разумѣть ту изъ дугъ, имѣющихъ синусъ x , которая заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (между этими границами существуетъ только одна дуга, имѣющая данный синусъ). Разматриваемая функція обратна тригонометрической: $x = \sin y$; поэтому производная ея равна (§ 60):

$$y = (\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc} \sin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(передъ радикаломъ отброшенъ знакъ $-$, такъ какъ y , по условію, заключается между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и, слѣд., $\cos y > 0$).

2^o. $y = \operatorname{arc} \cos x$, гдѣ x заключается между -1 и $+1$, а для y мы условливаемся брать только тѣ значенія, которые принадлежать области $(0, \pi)$ (въ этой области данному косинусу соотвѣтствуетъ только одна дуга). Функція эта обратна тригонометрической: $x = \cos y$, а потому ея производная равна:

$$(\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\operatorname{arc} \cos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(передъ радикаломъ отброшенъ знакъ $-$, такъ какъ y , по условію, заключается между 0 и π и потому $\sin x > 0$).

3^o. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, гдѣ x можетъ имѣть всевозможныя значенія между $-\infty$ и $+\infty$, а для y мы условливаемся брать только тѣ значенія, которые заключены между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ (въ этой области данному тангенсу соотвѣтствуетъ только одна дуга). Функція эта обратна тригонометрической: $x = \operatorname{tg} y$ и потому ея производная равна:

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

4^o. $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$, гдѣ x можетъ имѣть всевозможныя значенія между $-\infty$ и $+\infty$, а для y мы условливаемся брать только тѣ значенія, которые заключены между 0 и π (въ этой области данному котангенсу соотвѣтствуетъ только одна ду-

га). Рассматриваемая функция обратна тригонометрической:
 $x = \cot y$ и потому:

$$(\arccot x)' = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

Замѣчаніе. Если u есть функция отъ x , допускающая производную u' , то производная отъ сложныхъ функций: $\arcsin u$, $\arccos u$, $\arctg u$ и $\arccot x$ будутъ:

$$\frac{u'}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{u'}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{u'}{1+x^2}, -\frac{u'}{1+x^2}$$

Таблица основныхъ формулъ дифференцированія.

65. Для наглядности выпишемъ всѣ найденные нами результаты нахожденія производныхъ въ слѣдующей таблицѣ:

$$1. (A)' = 0$$

$$2. x' = 1$$

$$3. (Ax^n)' = nAx^{n-1}$$

$$4. (u+v-w)' = u'+v'-w'$$

$$5. (uv)' = u'v + v'u$$

$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$7. (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$8. (\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$9. (a^x)' = a^x \log a$$

Частный случай: $(e^x)' = e^x$

$$y = f(u) \cdot u^l; y' = (u^m)' = m \cdot u^{m-1} u';$$

$$(w^v)' = w^v \cdot v' \cdot \ln w + v \cdot w^{v-1} w'$$

Нѣкоторыя примѣненія дифференціального исчислениія.

18. *І. Признаки возрастанія и убыванія функций.*

66. Определенія. 1^o. Функция $f(x)$ наз. возрастающею въ данной области аргумента, если, при измѣненіи x въ этой области, она измѣняется въ смыслѣ, одинаковомъ съ измѣненіемъ x , т. е. возрастаетъ при возрастаніи x и убываетъ при убываніи x .

Это можно выразить другими словами такъ: функция $f(x)$ наз. возрастающею въ данной области аргумента, если для всякихъ двухъ чиселъ α и β этой области частное

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} [1]$$

положительно. Дѣйствительно, оно можетъ быть положительнымъ только тогда, когда при $\alpha > \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$, а при $\alpha < \beta$ и $f(\alpha) < f(\beta)$.

2^o. Функция $f(x)$ наз. убывающею въ данной области аргумента, если въ этой области она измѣняется въ смыслѣ противоположномъ съ измѣненіемъ x , другими словами, если частное [1] будетъ отрицательно.

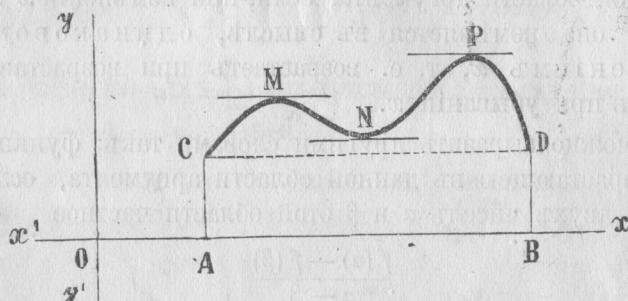
Въ геометрическомъ смыслѣ возрастаніе и убываніе функции можно представлять себѣ такъ: если $f(x)$ есть функция возрастающая въ области аргумента (a, b) , то при возрастаніи абсциссы отъ $x=a$ до $x=b$ ординаты кривой, выражющей функцию $y=f(x)$, возрастаютъ, т.-е. кривая подымается вверхъ (см. черт. 10); если же $f(x)$ есть функция убывающая, то кривая опускается внизъ (см. черт. 11).

Для строгаго вывода признаковъ возрастанія или убыванія функций, предварительно докажемъ двѣ слѣдующія теоремы.

67. Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ имѣть производную $f'(x)$ въ области аргумента (a, b) (и, слѣд. непрерывна въ этой области) и если, сверхъ того,

$f(a)=f(b)$, то существует по крайней мѣрѣ одно такое число c , заключающееся между a и b , при которомъ $f'(c)=0$.

1º. Геометрическое представление этой теоремы. Пусть (черт. 13) $OA=a$, $OB=b$, $AC=f(a)$, $BD=f(b)=f(a)$ и кривая $C M N P D$ изображаетъ функцию $f(x)$.



Черт. 13.

По условію, функция $f(x)$ имѣеть производную $f'(x)$ для области (a, b) . Въ геометрическомъ смыслѣ это значитъ, что кривая $C M N P D$ во всякой точкѣ ея, расположенной между C и D , имѣеть касательную, и притомъ одну, какъ справа, такъ и слѣва (иначе сказать, кривая между C и D не имѣеть особыхъ точекъ). При этихъ условіяхъ становятся нагляднымъ, что если $f(a)=f(b)$, т. е. если $AC=BD$, то какова бы кривая ни была, всегда окажется на ней одна или нѣсколько точекъ, какъ M , N , P на нашемъ чертежѣ, въ которыхъ касательные параллельны осямъ x -овъ. Для такихъ касательныхъ углы, составленный ими съ положительнымъ направленіемъ оси x -овъ, окажется равнымъ 0 , слѣд., равенъ 0 и тангенсъ этого угла; а этотъ тангенсъ равенъ производной; слѣд., между a и b должно существовать одно или нѣсколько такихъ чиселъ c , при которыхъ $f'(c)=0$.

2º. Аналитическое доказательство. Если при измѣненіи x отъ a до b функция $f(x)$ остается постоянной,

то ея производная для этой области равна 0 (§ 39); слѣд., въ этомъ случаѣ теорема Ролля имѣеть мѣсто. Предположимъ, что этого нѣть. Тогда одно изъ двухъ: или при измѣненіи x отъ a до b функция переходитъ, между прочимъ, черезъ значенія большія $f(a)$, или такихъ значеній совсѣмъ не окажется, но тогда она должна переходить черезъ значенія, меньшія $f(a)$. Разсмотримъ первый случай. Такъ какъ, при измѣненіи x отъ a до b , $f(x)$ непрерывно переходитъ отъ значенія $f(a)$ къ равному значенію $f(b)$, то мы можемъ изъ всѣхъ значеній, которыхъ больше $f(a)$, выбрать одно самое наибольшее или, по крайней мѣрѣ, не меньшее ни одного изъ остальныхъ. Пусть это будетъ значение $f(c)$, соответствующее некоторому значенію аргумента $x=c$, заключающемуся между a и b . Тогда

$$f(c+h)-f(c) \leqslant 0 \text{ и } f(c-h)-f(c) \leqslant 0$$

для всякаго положительнаго h , выбраннаго настолько малымъ, чтобы числа $c-h$ и $c+h$ заключались между a и b . Но тогда будемъ имѣть:

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0 \text{ и } \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geqslant 0$$

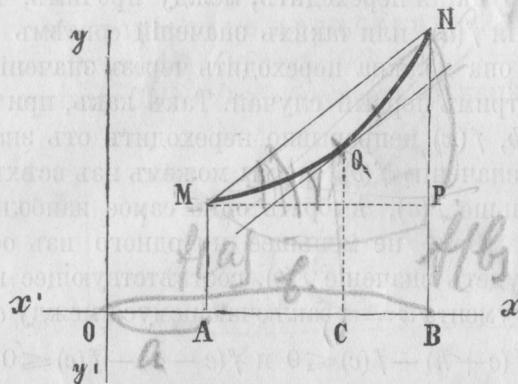
слѣд., когда h стремится къ 0 , предѣль первого изъ этихъ отношеній есть 0 или отрицательное число, а предѣль второго отношенія есть 0 или положительное число. Но оба эти отношенія, согласно условію теоремы, имѣютъ одинъ и тотъ же предѣль, именно $f'(c)$; значитъ, $f'(c)=0$.

Если бы мы предположили, что въ числѣ значеній, принимаемыхъ $f(x)$ при измѣненіи x отъ a до b , нѣть значеній, большихъ $f(a)$, то тогда мы взяли бы значение $f(c)$ самое малое изъ всѣхъ, или, по крайней мѣрѣ, не большее ни одного изъ остальныхъ, и такъ же доказали бы, что $f'(c)=0$.

68. Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ имѣеть производную $f'(x)$ въ области аргумента (a, b) , то между a и b существуетъ по крайней мѣрѣ одно такое число c , при которомъ

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

1º. Геометрическое представление этой теоремы. Пусть (черт. 14) MQN есть кривая, изображающая функцию $y=f(x)$, при чём $OA=a$, $OB=b$, $AM=f(a)$, $BN=f(b)$.



Черт. 14.

Такъ какъ функция $f(x)$, по условию, имѣеть производную $f'(x)$ для области (a, b) , то кривая MN для каждой своей точки между M и N имѣть касательную (одну и ту же въ обѣ стороны).

Изъ чертежа видно, что $f(b)-f(a)=NP$ (если $MP \parallel AB$) и $b-a=AB=MP$. Отношение $f(b)-f(a)$ къ $b-a$ равно тангенсу угла NMP . Такъ какъ производная $f'(x)$ равна тангенсу угла, составленного касательной съ полуосью Ox , то равенство

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

доказываемое въ теоремѣ Лагранжа, утверждается, что на кривой MN между M и N существуетъ по крайней мѣрѣ одна такая точка Q , для которой касательная окажется параллельна хордѣ MN .

2º. Аналитическое доказательство. Обозначимъ дробь $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ черезъ A ; тогда

$$(b-a)A = f(b)-f(a)$$

$$f(a)-aA = f(b)-bA$$

или

[1]

Возьмемъ вспомогательную функцию:

$$\varphi(x) = f(x) - Ax$$

Эта функция имѣеть въ области (a, b) производную

$$\varphi'(x) = f'(x) - A$$

и, кроме того, при $x=a$ и $x=b$ она принимаетъ равныя значения, какъ видно изъ равенства [1]. Поэтому, согласно теоремѣ Ролля, между a и b существуетъ по крайней мѣрѣ одно такое число c , при которомъ $\varphi'(c)=0$, т.-е.

$$f'(c) - A = 0 \text{ и слѣд. } f'(c) = A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Замѣчаніе. Изъ доказаннаго равенства слѣдуетъ:

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

т.-е. приращеніе функции, соответствующее конечному приращенію аргумента, равно произведенію этого приращенія на производную, взятую для нѣкотораго промежуточнаго значенія аргумента.

Поэтому теорема Лагранжа называется часто теоремою конечныхъ приращеній.

69. Признакъ постоянства функции. Для того, чтобы функция $f(x)$, имѣющая въ области аргумента (a, b) производную $f'(x)$, сохраняла въ этой области постоянное значеніе, необходимо и достаточно, чтобы для каждого значенія x , принадлежащаго области (a, b) , производная $f'(x)$ была равна нулю.

1º. Геометрическое представление. Если функция $f(x)$ постоянна въ области (a, b) , то въ этой области геометрически она выражается прямой, параллельной оси x —овъ; но касательная къ прямой, проведенная черезъ любую ея точку, сливается съ самой прямой; слѣд., угловой коэффиціентъ, равный $f'(x)$, для всякой касательной въ области (a, b) , равенъ 0. Обратно, если $f'(x)=0$ для области (a, b) , то геометрически это значитъ, что касательная, проведенная черезъ любую точку кривой (въ этой области), параллельна

оси x -овъ, что возможно только тогда, когда кривая въ области (a, b) представляетъ собою прямую, параллельную оси x -овъ; но тогда функція $f(x)$ сохраняетъ постоянное значение въ области аргумента (a, b) .

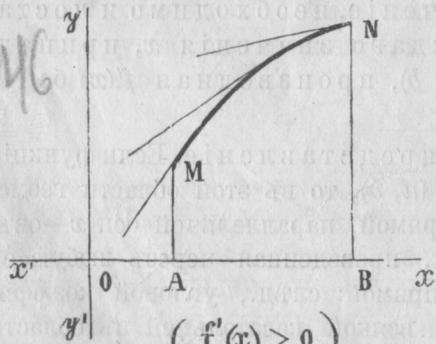
2º. Аналитическое доказательство. Рассматриваемый признакъ необходимъ, такъ какъ если функція $f(x)$ равна постоянному числу для всѣхъ значеній x области (a, b) , то ея производная для этой области равна 0, какъ производная отъ постоянного числа. Для доказательства достаточности этого признака, воспользуемся теоремою Лагранжа. Возьмемъ между a и b два произвольныхъ числа α и β и докажемъ, что если $f'(x)=0$ для всякаго значенія x области (a, b) , то $f(\alpha)=f(\beta)$.

На основаніи теоремы Лагранжа мы можемъ утверждать, что между α и β существуетъ по крайней мѣрѣ одно такое число γ , при которомъ имѣеть мѣсто равенство:

$$f'(\gamma) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Такъ какъ число γ принадлежить области a, b , то, согласно условію, $f'(\gamma)=0$; слѣд., $f(\beta)=f(\alpha)$.

× 70. Признакъ возрастанія функций. Для того, чтобы функція $f(x)$, имѣющая въ области аргумента (a, b) производную $f'(x)$, была въ этой области



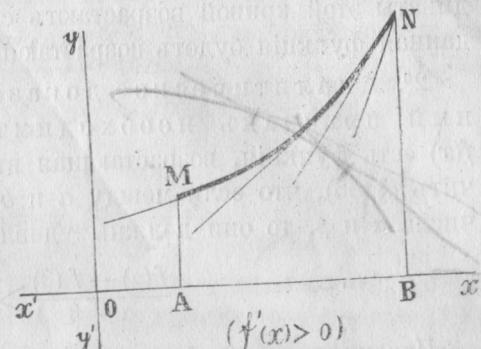
Черт. 15.

възрастающей, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ не была числомъ отрицательнымъ ни для какого значенія x , заключающагося между a и b , и чтобы не

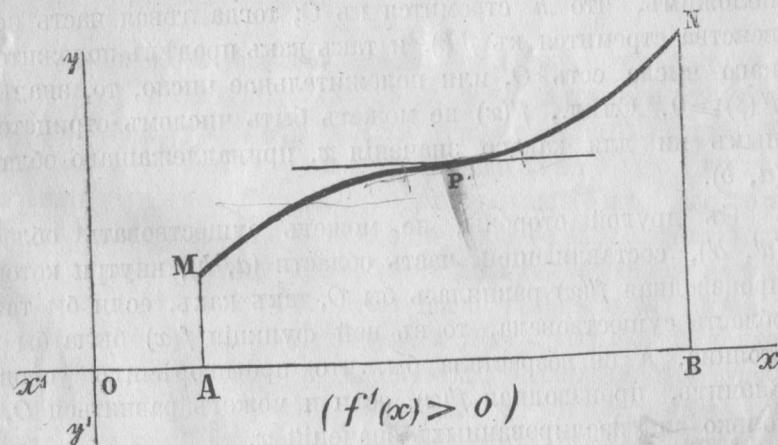
существовало области (a', b') , составляющей часть области (a, b) , для которой производная $f'(x)$ была бы 0;

другими словами, необходимо и достаточно, чтобы внутри области аргумента (a, b) производная была положительна, при чмъ для отдельныхъ (изолированныхъ) значеній аргумента она можетъ равняться 0.

1º. Геометрическое представление. Если функція $f(x)$ возрастаетъ въ области аргумента (a, b) , то въ этой области геометрически она выражается такой кривой (чертежи 15-й, 16-й и 17-й), которой ординаты возрастаютъ слѣва направо; тогда касательная, проводимая къ разнымъ точкамъ этой кривой, образуютъ съ полуосью Ox острые углы (производные положительны),



Черт. 16.



Черт. 17.

для точки P на черт. 17-мъ, касательная можетъ образовать съ Ox и уголъ въ 0° (производная равна нулю).

Обратно, если касательные, проведенные къ разнымъ точкамъ кривой, образуютъ съ Ox острѣ углы (производныя положительны), при чмъ для отдельныхъ точекъ кривой уголъ можетъ оказаться и O^0 (производная равна O), то ординаты этой кривой возрастаютъ слѣва направо, и, значитъ, данная функція будетъ возрастающей.

2º. Аналитическое доказательство. 1) Указанный признакъ необходимъ. Дѣйствительно, пусть $f(x)$ есть функція, возрастающая въ области (a, b) . Это значитъ (§ 66), что если между a и b возьмемъ два какія-либо числа α и β , то они должны удовлетворять неравенству:

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} > 0.$$

Положимъ $\alpha - \beta = h$ и слѣд., $\alpha = \beta + h$; тогда неравенство это представится такъ:

$$\frac{f(\beta + h) - f(\beta)}{h} > 0$$

гдѣ h есть положительное или отрицательное число. Предположимъ, что h стремится къ O ; тогда лѣвая часть неравенства стремится къ $f'(\beta)$, и такъ какъ предѣль положительнаго числа есть O , или положительное число, то, значитъ, $f'(\beta) \geqslant 0$. Слѣд., $f'(x)$ не можетъ быть числомъ отрицательнымъ ни для какого значенія x , принадлежащаго области (a, b) .

Съ другой стороны, не можетъ существовать области (a', b') , составляющей часть области (a, b) , внутри которой производная $f'(x)$ равнялась бы O , такъ какъ, если бы такая область существовала, то въ ней функція $f(x)$ была бы постоянна, а не возрастила бы, что противорѣчить условію. Значить, производная $f'(x)$, если и можетъ равняться O , то только для изолированныхъ значеній x .

2) Указанный признакъ достаточенъ. Пусть $f'(x)$ удовлетворяетъ всѣмъ требованіямъ теоремы. Возьмемъ между a и b два какія-нибудь числа α и β ($\alpha < \beta$) и докажемъ, что $f(\alpha) < f(\beta)$. Функція $f(x)$ не можетъ быть постоян-

ной въ области (α, β) , такъ какъ, если бы это было, производная $f'(x)$ равнялась бы O въ этой области, что противорѣчить условію теоремы. Значитъ, между α и β можно найти такое число γ , при которомъ $f(\gamma) \neq f(\alpha)$. Согласно теоремѣ Лагранжа, между α и γ существуетъ такое число α' и между γ и β такое число β' , при которыхъ

$$f'(\alpha') = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} \quad [1]$$

$$f'(\beta') = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} \quad [2]$$

Согласно условію, на одно изъ чиселъ $f'(\alpha')$ и $f'(\beta')$ не можетъ быть отрицательнъмъ; кроме того, число $f'(\alpha')$ не можетъ равняться нулю, такъ какъ въ противномъ случаѣ изъ равенства [1] выходило бы, что $f(\gamma) = f(\alpha)$, тогда какъ мы взяли число γ такимъ, при которомъ $f(\gamma) \neq f(\alpha)$. Поэтому изъ равенства [1] и [2] заключаемъ:

$$f(\alpha) < f(\gamma) \quad f(\gamma) \leqslant f(\beta)$$

Откуда

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

71. Признакъ убыванія функціи. Для того, чтобы функція $f(x)$, имѣющая въ области аргумента (a, b) производную $f'(x)$, была въ этой области убывающей, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ не была числомъ положительнымъ ни для какого значенія x , заключающимся между a и b , и чтобы не существовало области (a', b') , составляющей часть области (a, b) , для которой производная $f'(x)$ была бы O ; другими словами, необходимо и достаточно, чтобы внутри области аргумента (a, b) производная была отрицательна, при чмъ для отдельныхъ (изолированныхъ) значеній аргумента она можетъ равняться нулю.

Этотъ признакъ объясняется геометрически вполнѣ аналогично признаку возрастанія и аналитически доказывается совершенно такъ же, какъ и этотъ признакъ.

72. Примѣры.

$$1) \quad y = x^m$$

(m есть постоянное положительное цѣлое число).

Производная этой функциї есть $y' = mx^{m-1}$. При $x=0$ эта производная равна 0, а при $x > 0$ она положительна. Слѣд., данная функция возрастает въ области аргумента $(0, +\infty)$. Если $x < 0$ и m число нечетное, то $mx^{m-1} > 0$ и, слѣд., при этихъ условіяхъ функция есть возрастающая; если $x < 0$ и m число четное, то $mx^{m-1} < 0$ и слѣд., данная функция будетъ тогда убывающей. Такимъ образомъ: при m нечетномъ данная функция возрастаетъ въ области аргумента $(-\infty, +\infty)$, а при m четномъ она убываетъ въ области $(-\infty, 0)$ и возрастаетъ въ области $(0, +\infty)$.

$$2) \quad y = x + \frac{2a^2}{x}.$$

Производная этой функциї есть:

$$y' = 1 + \frac{-2a^2}{x^2} = 1 - \frac{2a^2}{x^2} = \frac{x^2 - 2a^2}{x^2}$$

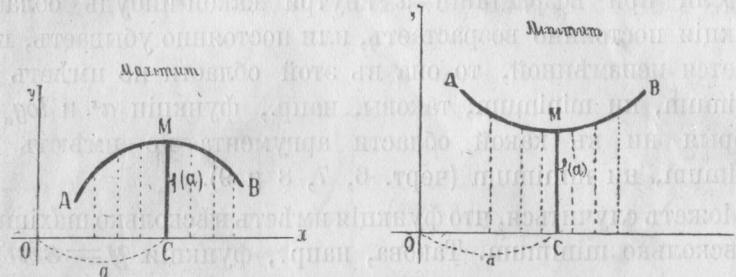
Очевидно, что если абс. величина x превосходитъ абс. величину $a\sqrt{2}$, то $x^2 > 2a^2$ и, слѣд., тогда производная положительна; если же абс. величина x меньше абс. величины $a\sqrt{2}$, то $x^2 < 2a^2$ и тогда производная отрицательна; поэтому, обозначивъ абс. величину a черезъ a' , можемъ утверждать, что въ областяхъ $(-\infty, -a'\sqrt{2})$ и $(+a'\sqrt{2}, +\infty)$ данная функция возрастаетъ, а въ области $(-a'\sqrt{2}, +a'\sqrt{2})$ она убываетъ.

II. Наибольшія и наименьшія значенія функциї.

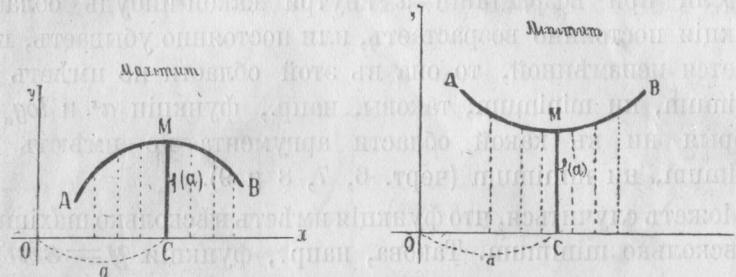
73. Опредѣленія и разъясненія. Если при непрерывномъ возрастаніи аргумента x въ какой-нибудь области (какъ бы мала эта область ни была) функция $f(x)$, измѣняясь непрерывно, увеличивается до нѣкотораго значенія $f(a)$, а потомъ уменьшается, то значеніе $f(a)$ наз. maximum функциї

$f(x)$. Если же при этомъ $f(x)$ уменьшается непрерывно до нѣкотораго значенія $f(a)$, а затѣмъ увеличивается, то $f(a)$ наз. minimum функциї $f(x)$.

Пояснимъ это на чертежахъ. Пусть кривая AB (черт. 18 и 19) изображаетъ данную функцию $f(x)$. Если случится,



Черт. 18.



Черт. 19.

что при непрерывномъ возрастаніи абсциссы x внутри какой-нибудь, хотя бы и очень малой области, ординаты кривой сначала возрастаютъ (черт. 18) до значенія $MC = f(a)$, а потомъ убываютъ, или, наоборотъ, ординаты сначала убываютъ (черт. 19) до значенія $MC = f(a)$, а потомъ возрастаютъ, то $f(a)$ въ первомъ случаѣ наз. maximum, а во второмъ—minimum функциї $f(x)$.

Изъ этого опредѣленія слѣдуєть, что $f(a)$ будетъ maximum, когда при безконечно маломъ h удовлетворяются слѣдующія неравенства:

$$f(a+h) < f(a) \text{ и } f(a-h) < f(a)$$

и $f(a)$ будетъ minimum, когда при такомъ же h будуть имѣть мѣсто такія неравенства:

$$f(a+h) > f(a) \text{ и } f(a-h) > f(a)$$

Эти неравенства можно иначе выразить такъ:

$$f(a+h) - f(a) < 0 \dots \text{въ случаѣ maximum}$$

$$f(a+h) - f(a) > 0 \dots \text{въ случаѣ minimum}$$

т.-е. $f(a)$ есть maximum, если при $x=a$ приращеніе

функциї остается отрицательнымъ независимо отъ знака безконечно малаго приращенія аргумента; и $f(a)$ есть minimum, если при $x=a$ приращеніе функциї остается положительнымъ независимо отъ знака безконечно малаго приращенія аргумента.

Если при возрастаніи x внутри какой-нибудь области функция постоянно возрастаетъ, или постоянно убываетъ, или остается неизмѣнной, то она въ этой области не имѣть ни maximum, ни minimum; таковы, напр., функции a^x и $\log_a x$, которые ни въ какой области аргумента не имѣютъ ни maximum, ни minimum (черт. 6, 7, 8 и 9).

Можетъ случиться, что функция имѣть нѣсколько maximum и нѣсколько minimum. Такова, напр., функция $y=\sin x$ (черт. 20), которая при $x=\frac{\pi}{2}$ имѣть maximum +1, при

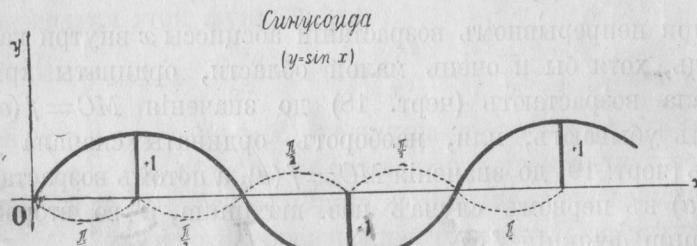


Рис. 20.

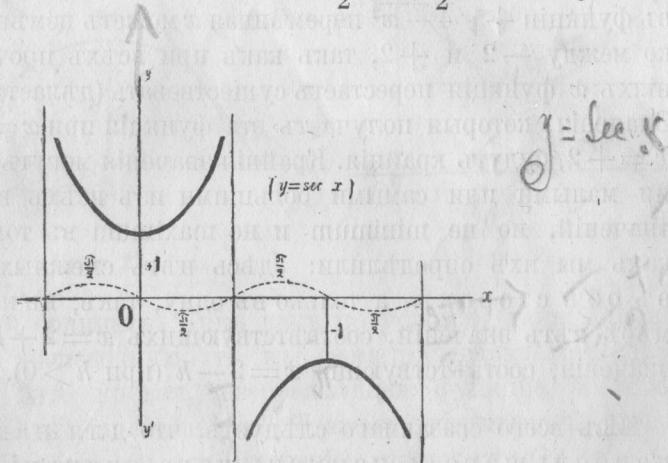
$x=\frac{3\pi}{2}$ имѣть minimum -1, при $x=\frac{5\pi}{2}$ получаетъ снова maximum +1, при $x=\frac{7\pi}{2}$ получаетъ снова minimum -1 и т. д. (Кривая, изображенная на черт. 20-мъ, наз. синусоидой, такъ какъ она изображаетъ измѣненіе синуса).

Не должно смѣшивать maximum функциї съ ея наиболѣшимъ значеніемъ, а minimum функциї съ ея наименьшимъ значеніемъ, такъ какъ maximum не есть наибольшее, а minimum не есть наименьшее, изъ всѣхъ значеній функциї,

а только изъ всѣхъ близкихъ къ нему (такъ называемыхъ смежныхъ значеній) *).

Maximum функциї можетъ иногда оказаться менѣе ея minimum. Напр., тригонометрическая функция $y=\sec x$

(черт. 21) при измѣненіи x отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ сначала умень-



Черт. 21.

шается отъ $+\infty$ до +1 (при $x=0$), затѣмъ увеличивается отъ +1 до $+\infty$. Значитъ, при $x=0$ она получаетъ minimum +1.

При возрастаніи x отъ $+\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{3\pi}{2}$ эта функция сначала возрастаетъ отъ $-\infty$ до -1 (при $x=\pi$), затѣмъ уменьшается отъ -1 до $-\infty$; значитъ, при $x=\pi$ она переходитъ черезъ maximum, равный -1. Такимъ образомъ, maximum функциї $\sec x$ оказывается менѣе ея minimum.

*) Въ нѣкоторыхъ руководствахъ термины „наибольшее“, и „наименьшее“ значенія функциї употребляются въ томъ же смыслѣ, какъ и термины „maximum“ и „minimum“; но въ такихъ случаяхъ приходится пояснить, что наибольшее (наименьшее) значеніе не должно смѣшивать съ самыи болѣшимъ (самымъ малымъ) значеніемъ. Для избѣжанія такого этимологического неудобства, мы предпочли для maximum и minimum оставить только эти латинскія названія.

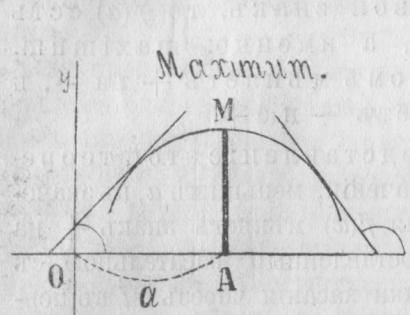
Maximum и minimum функції должно также различать отъ такъ называемыхъ краинихъ значеній, которыя иногда можетъ имѣть функція. Если по условіямъ вопроса или по свойствамъ самой функції перемѣнная x можетъ измѣняться только въ опредѣленной области, напр. между a и b , то $f(a)$ и $f(b)$ наз. крайними значениями функції. Напр., въ функції $+ \sqrt{4 - x^2}$ перемѣнная x можетъ измѣняться только между -2 и $+2$, такъ какъ при всѣхъ прочихъ значеніяхъ x функція перестаетъ существовать (дѣлается мнимою). Значенія, которыя получаетъ эта функція при $x = -2$ и при $x = +2$, будутъ крайнія. Крайнія значения могутъ быть самыми малыми или самыми большими изъ всѣхъ возможныхъ значеній, но не minimum и не maximum въ томъ смыслѣ, какъ мы ихъ опредѣлили: здѣсь нѣтъ смежныхъ значеній въ обѣ стороны, а только въ одну; такъ, въ нашемъ примѣрѣ нѣтъ значеній, соотвѣтствующихъ $x = 2 + h$, хотя есть значенія, соотвѣтствующія $x = 2 - h$ (при $h > 0$).

Изъ всего сказанного слѣдуетъ, что для нахожденія наибольшаго и наименьшаго значенія данной непрерывной функції внутри области аргумента (a, b) , надо предварительно отыскать всѣ maximum и minimum, которые функція получаетъ при непрерывномъ измѣненіи x отъ a до b , затѣмъ найти крайнія значенія функції при $x = a$ и $x = b$ и, наконецъ, изъ всѣхъ этихъ значеній взять самое большое и самое малое.

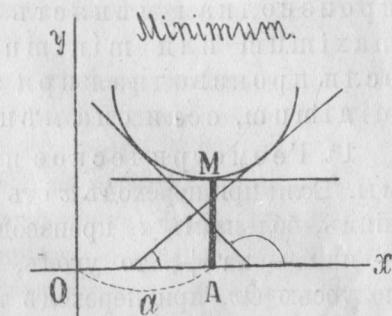
Перейдемъ теперь къ указанію способовъ нахожденія maximum и minimum данной функції.

74. Теорема 1. Если функція $f(x)$ при $x = a$ получаетъ maximum или minimum и имѣеть производную $f'(a)$, то при переходѣ x отъ значеній, меньшихъ a , къ значеніямъ, большимъ a , эта производная мѣняетъ свой знакъ, а именно + на —, если $f(a)$ есть maximum, и — на +, если $f(a)$ есть minimum.

1^o. Геометрическое представление этой теоремы. Пусть функція изображена кривою и при абсциссѣ $x = a = OA$ ордината AM есть maximum (черт. 22) или minimum



Черт. 22.



Черт. 23.

(черт. 23) ординатъ. Такъ какъ по условію, данная функція имѣеть производную, то въ геометрическомъ смыслѣ это значитъ, что кривая, изображающая функцію, имѣеть во всякой точкѣ касательную. Теорема утверждаетъ, что при переходѣ абсциссы отъ значеній, меньшихъ OA , къ значеніямъ, большимъ OA , тангенсъ угла, составленного касательною съ полуосью Ox , изъ положительного дѣлается отрицательнымъ въ случаѣ maximum и изъ отрицательного дѣлается положительнымъ въ случаѣ minimum, и, слѣд., самый уголъ въ первомъ случаѣ изъ острого переходитъ въ тупой (черт. 22), а во второмъ случаѣ, наоборотъ (черт. 23).

2^o. Аналитическое доказательство. Пусть $f(a)$ есть maximum функції $f(x)$. Тогда можемъ утверждать, что если h есть бесконечно малое положительное число, то въ области $(a - h, a)$ функція $f(x)$ возрастаетъ, а въ области $(a, a + h)$ убываетъ; слѣд., производная $f'(x)$, которая, согласно условію, существуетъ, въ первой области должна быть положительна, а во второй отрицательна (§§ 70, 71); значитъ, при переходѣ x черезъ a она мѣняетъ знакъ + на —.

Если предположимъ, что $f(a)$ есть minimum, то такимъ же разсужденіемъ убѣдимся, что $f'(x)$ при переходѣ x черезъ a мѣняетъ знакъ — на +.

75. Теорема 2 (обратная). Если функция $f(x)$ имъеть производную $f'(x)$ и при переходѣ x отъ значеній, меньшихъ a , къ значеніямъ, большимъ a , эта производная мѣняетъ свой знакъ, то $f(a)$ есть maximum или minimum, а именно: maximum, если производная при этомъ мѣняетъ + на -, и minimum, если она мѣняетъ - на +.

1^o. Геометрическое представление этой теоремы. Если при переходѣ x отъ значеній, меньшихъ a , къ значеніямъ, большимъ a , производная $f'(x)$ мѣняетъ знакъ + на - или - на +, то уголъ, составленный касательной съ полуосью Ox , при переходѣ точки касанія черезъ M въ первомъ случаѣ изъ острого дѣлается тупымъ (черт. 22), а во второмъ случаѣ изъ тупого дѣлается острымъ (черт. 23). Теорема утверждается, что тогда ордината AM окажется maximum въ первомъ случаѣ и minimum во второмъ.

2^o. Аналитическое доказательство. Пусть при переходѣ x черезъ a производная $f'(x)$ мѣняетъ + на -. Это значитъ, что если h есть бесконечно малое положительное число, то $f'(x)$ при возрастаніи x отъ $a-h$ до a есть число положительное, а при возрастаніи x отъ a до $a+h$ она становится числомъ отрицательнымъ. Отсюда заключаемъ, что въ области аргумента $(a-h, a)$ функция $f(x)$ возрастаетъ, а въ области $(a, a+h)$ убываетъ ($\S\S 70, 71$); значитъ, $f(a)$ есть maximum $f(x)$.

Такъ же убѣдимся, что когда при переходѣ x черезъ a производная мѣняетъ - на +, то $f(a)$ есть minimum $f(x)$.

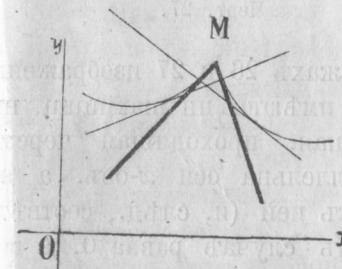
76. Примѣнение этихъ теоремъ. Изъ двухъ доказанныхъ теоремъ слѣдуетъ: чтобы при $x=a$ функция $f(x)$, имѣющая производную $f'(x)$, получала maximum или minimum, необходимо и достаточно, чтобы при переходѣ x черезъ a производная мѣняла свой знакъ.

Примѣняя этотъ признакъ къ нахожденію maximum и minimum, мы должны различить 2 случая:

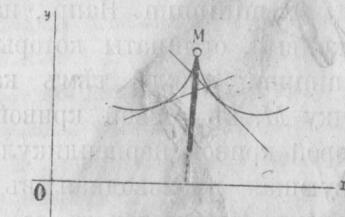
1) Если производная есть функция непрерывная для всякаго значенія x нѣкоторой области, то перемѣнить

знакъ внутри этой области она можетъ не иначе, какъ переходя черезъ нулевое значеніе ($\S 35_{,1}$). Въ этомъ случаѣ касательная, проходящая черезъ точку M кривой, изображающей функции (черт. 22 и 23), должна быть параллельна оси x -въ.

2) Если производная непрерывна въ нѣкоторой области за исключеніемъ одного или нѣсколькихъ отдѣльныхъ значеній аргумента, при которыхъ она претерпѣваетъ разрывъ непрерывности (напр., обращается въ $\pm\infty$), то перемѣнить знакъ внутри этой области она можетъ и не обращаясь въ нуль, а претерпѣвая разрывъ непрерывности. Такие, напр., случаи геометрически представлены на чертежахъ 24 и 25, на которыхъ тангенсъ угла, образованного



Черт. 24.

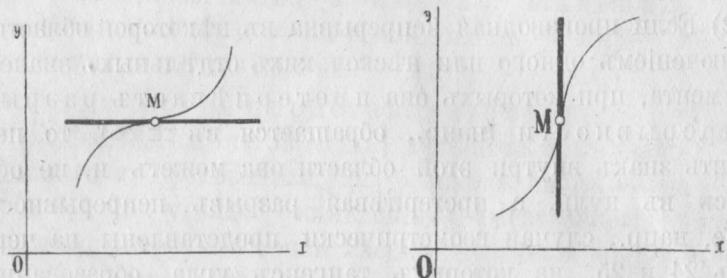


Черт. 25.

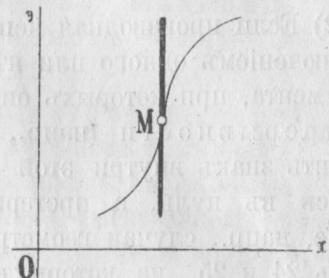
касательной съ полуосью Ox , при переходѣ точки касанія черезъ особенную точку M , изъ положительнаго дѣлается отрицательнымъ, не переходя черезъ нуль, а претерпѣвая разрывъ непрерывности (на черт. 24 кривая въ точкѣ M имѣть двѣ касательныя, одну слѣва, другую справа; на черт. 25 двѣ касательныя въ точкѣ M сливаются въ одну, образуя перпендикуляръ къ оси x -овъ).

Такимъ образомъ, оказывается, что значеніе аргумента, при которомъ функция получаетъ maximum или minimum, или должно быть корнемъ уравненія $f'(x)=0$, или же должно быть такимъ значеніемъ, при которомъ производная $f'(x)$ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности.

Должно замѣнить однако, что не всякий корень ур. $f'(x)=0$ и не всякое значение x , при которомъ $f'(x)$ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, обращаетъ функцию $f(x)$ въ maximum,



Черт. 26.



Черт. 27.

или въ minimum. Напр., на чертежахъ 26 и 27 изображены 2 кривыя, ординаты которыхъ не имѣютъ ни maximum, ни minimum, между тѣмъ касательная, проходящая черезъ точку M , въ первой кривой параллельна оси x -овъ, а во второй кривой перпендикулярна къ ней (и, слѣд., соотвѣтствующая производная въ первомъ случаѣ равна 0, а во второмъ обращается въ ∞).

Изъ всего сказанного слѣдуетъ: чтобы найти всѣ maximum и minimum данной функции $f(x)$, надо:

- 1) составить производную $f'(x)$;
- 2) отыскать всѣ вещественные корни уравненія $f'(x)=0$;
- 3) опредѣлить тѣ значенія аргумента x , при которыхъ производная $f'(x)$ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности;
- и 4) каждое изъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ подвергнуть изслѣдованию, съцѣлью рѣшить вопросъ, мѣняетъ ли знакъ, какъ именно, производная $f'(x)$ при переходѣ x черезъ изслѣдуемое число.

Общій пріемъ для рѣшенія послѣдняго вопроса состоить въ слѣдующемъ. Пусть x_1 есть одно изъ полученныхъ указанныхъ путемъ чиселъ. Составляемъ выраженія $f'(x_1-h)$ и $f'(x_1+h)$, где h есть бесконечно малое положительное число, и опредѣляемъ знакъ каждого изъ этихъ выражений; если знакъ окажется одинъ и тотъ же, то при $x=x_1$ функция не получаетъ ни maximum, ни minimum; если же знаки окажутся разные, то при $x=x_1$ функция получаетъ maximum, если $f'(x_1-h)$ имѣеть $+$, а $f'(x_1+h)$ имѣеть $-$, и minimum, если у первого выражения окажется знакъ $-$, а у второго $+$.

Иногда, какъ это мы увидимъ изъ приводимыхъ ниже примѣровъ, вопросъ о перемѣнѣ или не-перемѣнѣ знака рѣшается весьма просто, безъ какихъ-либо выкладокъ, по одному виду производной.

Наконецъ, часто употребляется пріемъ, указанный въ слѣдующемъ параграфѣ.

77. Примѣненіе производныхъ высшихъ порядковъ. Если изслѣдованию подлежитъ число x_1 , взятое изъ корней ур. $f'(x)=0$, и притомъ тогда, когда не только сама функция $f(x)$ непрерывна, но непрерывны также и ея производные: первая, вторая, третья и т. д., то вопросъ о перемѣнѣ знака можетъ быть рѣшенъ слѣдующимъ путемъ.

Находить вторую производную $f''(x)$. Если окажется, что она есть постоянное число, не равное 0, или при $x=x_1$ даетъ число $f''(x_1)$, не равное 0, то $f(x_1)$ будетъ maximum въ томъ случаѣ, когда это число окажется отрицательнымъ, и minimum, когда оно будетъ положительнымъ.

Пусть, напр., окажется, что $f''(x_1) < 0$; это значитъ, что функция $f'(x)$ убываетъ вблизи значенія аргумента $x=x_1$ и потому, переходя при $x=x_1$ черезъ значеніе 0, она мѣняетъ знакъ $+$ на $-$; слѣд., $f(x_1)$ есть maximum. Подобно этому убѣдимся, что если $f''(x_1) > 0$, то $f(x_1)$ есть minimum.

Если окажется, что $f''(x_1)=0$, тогда находить третью производную $f'''(x)$. Если эта производная при $x=x_1$ не равна 0 (или она есть постоянное число, не равное 0), то $f(x_1)$ не есть ни maximum, ни minimum.

Действительно, если $f'''(x_1) \neq 0$, то:

$f''(x)$ убывает или возрастает вблизи значения аргумента $x=x_1$ и, слѣд., переходя через значение 0 при $x=x_1$, эта функция мѣняетъ свой знакъ; поэтому:

$f'(x)$ при $x=x_1$ имѣть maximum или minimum; значитъ, уничтожаясь (обращаясь въ нуль) при $x=x_1$, эта функция не мѣняетъ знака; поэтому:

$f(x_1)$ не есть ни maximum, ни minimum функции $f(x)$.

Если при $f''(x_1)=0$ еще и $f'''(x_1)=0$, тогда надо обратиться къ четвертой производной $f''''(x)$. Если окажется, что при $x=x_1$ она не равна 0 (или есть постоянное число, не равное 0), то $f(x_1)$ будетъ maximum, когда $f''''(x_1)<0$, и minimum, когда $f''''(x_1)>0$, въ чмъ можно убѣдиться, разсуждая подобно предыдущему такъ:

Если $f''''(x_1)<0 (>0)$, то это значитъ, что функция $f''''(x)$ убываетъ (возрастаетъ) вблизи значенія аргумента $x=x_1$ и потому, уничтожаясь при $x=x_1$, она мѣняетъ знакъ + на — (— на +); слѣд.:

$f''(x_1)$ есть maximum (minimum) функции $f(x)$, и такъ какъ этотъ maximum (minimum) есть 0, то вблизи значенія аргумента $x=x_1$ функция $f''(x)$ остается отрицательной (положительной); слѣд.:

функция $f'(x)$ убываетъ (возрастаетъ) вблизи значенія аргумента $x=x_1$ и потому, уничтожаясь при $x=x_1$, она мѣняетъ знакъ + на — (— на +); слѣд.:

$f(x_1)$ есть maximum (minimum) функции $f(x)$.

Вообще, если первая изъ неуничтожающихся производныхъ окажется четнаго порядка (вторая, четвертая...), то при рассматриваемомъ значеніи x данная функция получаетъ maximum, когда эта производная отрицательна, и minimum, когда она положительна; если же первая изъ неуничтожающихся производныхъ окажется нечетнаго порядка (первая, третья...), то при рассматриваемомъ значеніи x данная функция не имѣть ни maximum, ни minimum.

78. Примѣры.

1) Найти въ области аргумента $(-4, +4)$ наибольшее и наименьшее значеніе функции:

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

Для этого, какъ мы видѣли (конецъ § 73), надо найти всѣ maximum и minimum данной функции, заключающіяся между -4 и $+4$, а также ея крайнія значенія при $x=-4$ и $x=+4$, и изо всѣхъ полученныхъ такимъ образомъ чиселъ взять наибольшее и наименьшее.

Чтобы отыскать maximum и minimum, надо прежде всего составить производную:

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3).$$

Значеній аргумента, при которыхъ производная претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, здѣсь нѣть. Остается найти корни уравненія $y'=0$. Эти корни слѣдующіе: $x_1=0$, $x_2=1$ и $x_3=3$; всѣ они принадлежать области $(-4, +4)$; поэтому надо изслѣдоватъ каждый изъ нихъ. Въ этомъ примѣрѣ удобно воспользоваться производными высшихъ порядковъ.

Вторая производная будеть:

$$y'' = 20x^3 - 60x^2 + 30x = 10x(2x^2 - 6x + 3).$$

При $x=1$ эта производная обращается въ отрицательное число, а при $x=3$ въ положительное; слѣд., при $x=1$ данная функция получаетъ maximum (онъ равенъ 2), а при $x=3$ она дѣлается minimum (равенъ -26). При $x=0$ вторая производная обращается въ 0. Возьмемъ поэтому третью производную:

$$y''' = 60x^3 - 120x + 30 = 30(2x^3 - 4x + 1).$$

При $x=0$ эта производная не уничтожается; такъ какъ она нечетнаго порядка, то заключаемъ, что при $x=0$ данная функция не есть ни maximum, ни minimum.

Остается еще найти крайнія значенія функции для данной области $(-4, +4)$. При $x=-4$ функция даетъ число -2623 ,

при $x = +4$ она равна $+65$. Мы получили такимъ образомъ четыре числа, указанныя въ слѣдующей таблицѣ:

$x =$	-4	+1	+3	+4
$y =$	-2623	+2	-26	+65

Такъ какъ данная функція непрерывная, то заключаемъ: наибольшее ея значеніе въ области $(-4, +4)$ есть $+65$, наименьшее -2623 .

2) Найти въ области аргумента $(-a, +a)$ наибольшее и наименьшее значеніе функціи (при $a > 0$):

$$y = \frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x}.$$

Находимъ сначала maximum и minimum этой функціи, для чего составляемъ первую производную:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a-x+x}{(a-x)^2} + \frac{-x-(a-x)}{x^2} = \frac{a}{(a-x)^2} - \frac{a}{x^2} = \\ &= \frac{ax^2 - a(a-x)^2}{(a-x)^2 x^2} = \frac{a(x^2 - a^2 + 2ax - x^2)}{(a-x)^2 x^2} = \frac{a^2(2x-a)}{(a-x)^2 x^2} \end{aligned}$$

Эта производная обращается въ нуль при $x = \frac{a}{2}$ и 2 раза претерпѣваетъ разрывъ непрерывности: при $x = 0$ и при $x = a$. Мы имѣемъ такимъ образомъ три числа: 0 , $\frac{a}{2}$ и a . Изъ нихъ первыя два принадлежать данной области аргумента $(-a, +a)$ и потому подлежать изслѣдованію; третьему числу соотвѣтствуетъ крайнее значеніе функціи.

Для изслѣдованія числа $x = \frac{a}{2}$, обращающаго производную въ нуль, надо было бы найти вторую производную; но въ этомъ примѣрѣ по одному виду первой производной легко сообразить, что при переходѣ x черезъ $\frac{a}{2}$ она мѣняетъ знакъ — на $+$. Дѣйствительно, такъ какъ числа a^2 , $(a-x)^2$ и x^2 всегда

положительны, то знакъ производной есть знакъ множителя $2x-a$, который очевидно, при $x < \frac{a}{2}$ отрицателенъ, а при $x > \frac{a}{2}$ положителенъ. Значитъ, при $x = \frac{a}{2}$ данная функція получаетъ minimum (онъ равенъ 2).

Чтобы изслѣдовать значеніе $x = 0$, снова обратимъ внимание на выраженіе $2x-a$ и на условіе, что $a > 0$. Дадимъ x два значенія: $0-h$ и $0+h$, гдѣ h есть положительное безконечно малое число. Тогда выраженіе $2x-a$ даетъ: $2(0-h)-a=-2h-a$ и $2(0+h)-a=2h-a$. Очевидно, число $-2h-a$ отрицательно; съ другой стороны, какъ бы мало постоянное число a ни было, безконечно малое число $2h$ дѣлается и остается меньше a ; слѣд., число $2h-a$ также отрицательно. Такимъ образомъ, производная не мѣняетъ своего знака при переходѣ x черезъ 0, и потому данная функція при $x=0$ не получаетъ ни maximum, ни minimum.

Остается теперь найти крайнія значенія функціи при $x = -a$ и $x = +a$. При первомъ изъ этихъ значеній аргумента функція равна:

$$y = \frac{-a}{a-(-a)} + \frac{a-(-a)}{-a} = \frac{-a}{2a} + \frac{2a}{-a} = -\frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{2}.$$

При $x = a$ функція перестаетъ существовать, но когда x приближается къ равенству съ a (отъ значеній, меньшихъ a), функція остается положительной, при чмъ абсолютная величина ея увеличивается безпредѣльно; это условно выражаютъ, говоря, что при $x = a$ функція обращается въ $+\infty$.

Итакъ, въ области $(-a, +a)$ мы имѣемъ одинъ minimum 2 и два крайнихъ значенія: $-2\frac{1}{2}$ и $+\infty$. Отсюда сейчасъ же видно, что наибольшаго значенія наша функція не имѣть, такъ какъ она можетъ сдѣлаться больше всякаго данного значения. Было бы ошибочно принять, что наименьшее значеніе функціи въ области $(-a, +a)$ есть $-2\frac{1}{2}$. Это было бы такъ, если бы данная функція внутри области была сплошь непрерывна; но она, какъ мы видѣли, при $x=0$ пре-

терп'єваетъ разрывъ непрерывности. Поэтому, надо опредѣлить, какія будуть предѣльныя значенія функціи, когда x стремится къ 0 отъ значеній, меньшихъ 0, и отъ значеній, большихъ 0. По виду самой функціи легко опредѣлить, что когда x приближается къ 0, оставаясь отрицательнымъ, функція тоже остается отрицательной, и когда x стремится къ 0, оставаясь положительнымъ, функція тоже остается положительной, при чмъ въ обоихъ случаяхъ абсолютная величина функціи безпредѣльно увеличивается. Это выражаютъ, говоря, что, при переходѣ x черезъ значеніе 0, функція переходитъ скачкомъ изъ $-\infty$ въ $+\infty$. Теперь видимъ, что наименьшія функція не имѣеть, такъ какъ она можетъ сдѣлаться шаго значеменіе всякаго даннаго числа.

3) Найти въ области аргумента $(0, \frac{\pi}{2})$ наибольшее и наименьшее значеніе функціи:

$$y = \frac{2 - \sin x}{\cos x}.$$

Найдемъ ея производную и приравняемъ ее 0:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\cos^2 x - (-\sin x)(2 - \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x + 2\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{2\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x} = 0 \\ 2\sin x - 1 &= 0; \sin x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Въ области аргумента $(0, \frac{\pi}{2})$ послѣднее уравненіе удовлетворяется только при $x = \frac{\pi}{6}$ (такъ какъ уголъ въ 30° имѣеть синусъ $\frac{1}{2}$).

Здѣсь по одному виду производной легко опредѣлить, мѣняетъ ли она свой знакъ, и какъ, при переходѣ x черезъ значеніе $\frac{\pi}{6}$. Такъ какъ $\cos^2 x$ есть число положительное, то надо обратить вниманіе только на числителю $2\sin x - 1$.

При $x = \frac{\pi}{6}$ число $2\sin x$ равно 1; при $x < \frac{\pi}{6}$ число это

меньше 1, а при $x > \frac{\pi}{6}$ оно больше 1 (такъ какъ $\sin x$ есть функція возрастающая въ области $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$). Слѣд. при переходѣ x черезъ значеніе $\frac{\pi}{6}$ производная мѣняетъ — на +, а потому при $x = \frac{\pi}{6}$ данная функція получаетъ minimum (онъ равенъ $\sqrt{3}$).

Такъ какъ внутри области $(0, \frac{\pi}{2})$ $\cos x$ никогда не обращается въ 0, то производная внутри этой области не терп'єваетъ разрыва непрерывности.

Крайнія значенія функціи суть: 2 при $x = 0$ и $+\infty$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

Наименьшее значеніе функціи есть $\sqrt{3}$ при $x = \frac{\pi}{6}$; наибольшаго значенія нѣть.

4) Найти наибольшее и наименьшее значеніе въ области аргумента $(-\infty, +\infty)$ функціи:

$$y = (x - 1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2}{3}(x - 1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 1}}$$

Ни при какомъ значеніи x эта производная не равна 0. При $x = 1$ она претерп'єваетъ разрывъ непрерывности. Изслѣдуемъ это значеніе. По виду производной видно, что при $x < 1$ она отрицательна, а при $x > 1$ положительна; слѣд., при переходѣ x отъ значеній, меньшихъ 1, къ значеніямъ, большихъ 1, производная мѣняетъ знакъ — на +; поэтому при $x = 1$ функція получаетъ minimum; онъ равенъ

$$(1 - 1)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Такъ какъ $(x-1)^2$ есть число всегда положительное, то при $x=-\infty$ и при $x=+\infty$ функция получаетъ значение $+\infty$.

Такъ какъ данная функция въ области $(-\infty, +\infty)$ сплошь непрерывна, то minimum ея, найденный выше, есть и наименьшее значение функции; наибольшаго значения нѣть.

5) Найти наибольшее и наименьшее значение трехчлена

$$y=ax^2+bx+c.$$

$$y'=2ax+b; \quad 2ax+b=0; \quad x_1=-\frac{b}{2a}$$

$$y''=2a.$$

Ни при какомъ значеніи x первая производная не претерпѣваетъ разрыва непрерывности; значитъ, надо испытать только значение $x_1=-\frac{b}{2a}$. Если $a>0$, тогда и $y''>0$, и если $a<0$, то и $y''<0$; слѣд. въ первомъ случаѣ трехчленъ имѣеть minimum, во второмъ maximum.

Такъ какъ данный трехчленъ есть функция непрерывная при всякомъ значеніи x , то minimum или maximum его будетъ въ то же время наименьшимъ или наибольшимъ значеніемъ.

Оно равно:

$$a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

III. Нахожденіе наибольшихъ и наименьшихъ значений нѣкоторыхъ суммъ и произведеній.

79. Теорема 1. Если сумма нѣсколькихъ переменныхъ чиселъ есть число постоянное, то произведение этихъ чиселъ получаетъ наибольшее значение при ихъ равенствѣ.

Доказ. Сначала докажемъ теорему для двухъ чиселъ. Пусть сумма $x+y$ равна постоянному числу a ; требуется найти наибольшее значение произведения $xy=x(a-x)=ax-x^2$.

Выраженіе $ax-x^2$ есть частный видъ трехчлена второй степени, у котораго коэффиціентъ при x^2 отрицательное число; въ такомъ случаѣ, по

доказанному выше, трехчленъ этотъ имѣеть maximum (и, слѣд., наибольшее значение) при x , опредѣляемомъ уравненіемъ:

$$(xy)'=a-2x=0; \text{ откуда: } x=\frac{a}{2}$$

$$\text{и, слѣд., } y=a-x=\frac{a}{2}, \text{ т.-е. } x=y.$$

Возьмемъ теперь три числа x, y и z , которыхъ сумма равна постоянному числу a ; требуется найти условіе, при которомъ произведение xyz будетъ наибольшимъ. Предположимъ, что найдены такія значенія этихъ переменныхъ, при которыхъ произведение ихъ дѣйствительно есть наибольшее изъ всѣхъ возможныхъ; пусть это будутъ x_1, y_1, z_1 . Оставивъ x_1 безъ измѣненія, станемъ измѣнять числа y_1 и z_1 , но такъ, чтобы сумма y_1+z_1 равнялась постоянному числу $a-x_1$; тогда, какъ мы видѣли выше, произведение y_1z_1 будетъ наибольшимъ при равенствѣ $y_1=z_1$. Но очевидно, что наибольшему произведению $x_1y_1z_1$ при условіи $x_1+y_1+z_1=a$ соответствуетъ наибольшая величина произведения y_1z_1 при условіи $y_1+z_1=a-x_1$. Слѣд., наибольшее значение произведения xyz будетъ при равенствѣ $y=z$. Но то же разсужденіе можно примѣнить къ любой парѣ чиселъ изъ трехъ x, y и z ; слѣд., всѣ они должны быть равны для того, чтобы произведение xyz было наибольшимъ.

Переходя отъ трехъ переменныхъ къ четыремъ, отъ 4-хъ къ 5-ти и т. д., мы докажемъ теорему для какого угодно конечнаго числа слагаемыхъ.

Какъ примѣненіе этой теоремы укажемъ слѣдующую задачу.

Задача. Изъ всѣхъ треугольниковъ съ даннымъ периметромъ, какой имѣеть наибольшую площадь?

Обозначивъ стороны треугольника буквами x, y и z , а периметръ его черезъ $2p$, будемъ имѣть для площади выражение:

$$\Delta=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

Такъ какъ p число постоянное, то наибольшое значение этой функции будетъ при наибольшемъ произведении $(p-x)(p-y)(p-z)$. Сумма сомножителей $(p-x)+(p-y)+(p-z)$ равна $3p-(x+y+z)=3p-2p=p$, т.-е., она есть число постоянное; поэтому наибольшее произведение будетъ при равенствѣ сомножителей, т.-е. при $p-x=p-y=p-z$; откуда: $x=y=z$; значитъ, искомый треугольникъ равносторонній.

80. Теорема 2. Если сумма нѣсколькихъ переменныхъ чиселъ $x+y+z+\dots+t$ есть число постоянное, то произведение $x^my^nz^r\dots tr$, гдѣ m, n, p, \dots, r суть цѣлые положительные числа, будетъ наибольшимъ при условіи

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\dots=\frac{t}{r}.$$

Доказ. Произведение $x^m y^n \dots t^r$ будетъ наибольшимъ при томъ же значеніи переменныхъ, при которыхъ окажется наибольшей дробь $\frac{x^m y^n \dots t^r}{m^m n^n \dots r^r}$. Но эту дробь можно представить въ видѣ произведения:

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n \dots \left(\frac{t}{r}\right)^r = \overbrace{\frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m} \dots \frac{y}{n} \cdot \frac{y}{n} \dots}^m \overbrace{\frac{t}{r} \cdot \frac{t}{r} \dots}^r$$

Такъ какъ сумма всѣхъ этихъ $m+n+\dots+r$ сомножителей равна $x+y+\dots+t$, т.-е. есть число постоянное, то, по доказанному выше, произведение окажется наибольшимъ при равенствѣ всѣхъ сомножителей, т.-е. при условіи: $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \dots = \frac{t}{r}$; что и треб. доказать.

Задача. Въ данный конусъ вписать цилиндръ съ наибольшимъ объемомъ.

Пусть радиусъ основанія и высота даннаго конуса будуть соотвѣтственно r и h , а радиусъ основанія и высота вписанаго цилиндра x и y . Тогда объемъ цилиндра выразится $\pi x^2 y$. Приведемъ эту функцию къ одной переменной, составивъ уравненіе, связывающее x съ y :

$$h - y : h = x : r; \text{ откуда: } x = \frac{rh - ry}{h}.$$

Слѣд., объемъ цилиндра будетъ:

$$\pi \left(\frac{rh - ry}{h} \right)^2 y = \frac{\pi r^2}{h^2} (h - y)^2 y$$

Вопросъ теперь приводится къ нахожденію наибол. значенія $(h - y)^2 y$. Такъ какъ сумма $(h - y) + y$ есть величина постоянная, то произведение $(h - y)^2 y$ будетъ наибольшее при условіи: $\frac{h-y}{2} = \frac{y}{1}$; отсюда: $y = \frac{h}{3}$.

Наиб. объемъ цилиндра будетъ:

$$\frac{\pi r^2}{h^2} \left(h - \frac{h}{3} \right)^2 \frac{h}{3} = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{4}{9} h^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{4\pi r^2 h}{27}.$$

81. Теорема 3. Если произведение нѣсколькихъ положительныхъ переменныхъ чиселъ есть число постоянное, то сумма этихъ чиселъ имѣть наименьшее значеніе при ихъ равенствѣ.

Доказ. Сначала докажемъ теорему для двухъ переменныхъ положительныхъ чиселъ x и y , которыхъ произведеніе равно постоянному числу a *).

Если $xy = a$, то $y = \frac{a}{x}$ и $x + y = x + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + a}{x}$.

*.) Предлагаемъ самимъ учащимся убѣдиться, что теорема не имѣть при меніи къ отрицательнымъ переменнымъ числамъ.

Составимъ производную отъ этой дроби (§ 48):

$$\left(\frac{x^2 + a}{x} \right)' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + a) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$$

Производная эта обращается въ 0 при $x = \sqrt{a}$ и въ ∞ при $x = 0$. Послѣднее значеніе x должно быть отброшено, такъ какъ изъ условия: $xy = a$ при $x = 0$ выходило бы: $y = \infty$ и тогда сумма $x + y$ не была бы наименьшей. Рассмотримъ значеніе $x = \sqrt{a}$. Очевидно, что знакъ производной одинаковъ со знакомъ ея числителя $x^2 - a$; но это выраженіе при $x < \sqrt{a}$ отрицательно, а при $x > \sqrt{a}$ положительно; слѣд., при переходѣ x черезъ значеніе \sqrt{a} производная мѣняетъ знакъ — на +; поэтому при $x = \sqrt{a}$ рассматриваемая функция имѣеть minimum. Такъ какъ эта функция непрерывна для всякаго значенія x , не равнаго 0 (а нулевое значеніе мы уже отбросили), то minimum функции есть въ то же время ея наименьшее значеніе. Итакъ, это значеніе имѣть мѣсто при $x = \sqrt{a}$; но тогда $y = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$, т.-е. $x = y$.

Возьмемъ теперь три переменныхъ положительныхъ числа x , y и z , которыхъ произведеніе равно постоянному числу a . Пусть вопросъ рѣшенъ и x_1 , y_1 и z_1 будутъ тѣ значения переменныхъ, при которыхъ сумма $x_1 + y_1 + z_1$ есть наименьшая. Тогда, оставляя x_1 безъ измѣненія, станемъ измѣнять числа y_1 и z_1 , но такъ чтобы произведеніе $y_1 z_1$ равнялось постоянному числу $\frac{a}{x_1}$. При этомъ условіи, какъ мы видѣли, сумма $y_1 + z_1$ будетъ наименьшей при $y_1 = z_1$. Но очевидно, что наименьшей суммѣ $x_1 + y_1 + z_1$ при условіи $x_1 y_1 z_1 = a$ соответствуетъ наименьшая сумма $y_1 + z_1$ при условіи $y_1 z_1 = \frac{a}{x_1}$. Слѣд., наименьшая сумма $x_1 + y_1 + z_1$ будетъ при равенствѣ $y_1 = z_1$. Но также можно показать, что $x_1 = y_1$, или $x_1 = z_1$; значитъ $x_1 = y_1 = z_1$.

Переходя отъ 3-хъ чиселъ къ 4-мъ, отъ 4-хъ къ 5-ти и т. д., докажемъ теорему для какого угодно конечнаго числа переменныхъ слагаемыхъ.

82. Теорема 4. Если произведеніе нѣсколькихъ положительныхъ переменныхъ сомножителей $x^m y^n z^p \dots t^r$, гдѣ m , n , p , суть числа постоянныя, цѣлые, положительныя, есть числопостоянное, то сумма $x + y + z + \dots + t$ получаетъ наименьшее значеніе при условіи

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{r}.$$

Доказ. Сумму $x + y + z + \dots + t$ можно представить такъ:

$$\overbrace{\frac{x}{m} + \frac{x}{m} + \dots + \frac{y}{n} + \frac{y}{n} + \dots + \frac{z}{p} + \frac{z}{p} + \dots + \dots + \frac{t}{r} + \frac{t}{r} + \dots}^{m} \overbrace{}^n \overbrace{}^p \overbrace{}^r$$

Такъ какъ произведение всѣхъ этихъ $m+n+p+\dots+r$ слагаемыхъ равно $\frac{x^m y^n z^p \dots t^r}{m^m n^n p^p \dots r^r}$, т.-е., есть число постоянное, то, согласно теоремѣ 3-й, сумма окажется самой малой при равенствѣ слагаемыхъ, т.-е.

при условіи $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \dots = \frac{t}{r}$; что и треб. доказать.

Задача. Опредѣлить цилиндръ, который при данномъ объемѣ имѣлъ бы наименьшую поверхность.

Обозначивъ радиусъ основанія цилиндра черезъ x , а высоту его черезъ y , будемъ имѣть для поверхности выраженіе $2\pi x y + 2\pi x^2 = 2\pi(xy + x^2)$; съдѣ, вопросъ приводится къ нахожденію наиб. значенія функции $xy + x^2$. Если объемъ цилиндра назовемъ v , то $\pi x^2 y = v$; откуда $y = \frac{v}{\pi x^2}$ и, слѣд.,

$$xy + x^2 = \frac{v}{\pi x} + x^2.$$

Такъ какъ $\left(\frac{v}{\pi x}\right)^2 \cdot (x^2)^1 = \frac{v^2}{\pi^2}$ — число постоянное,

$$\text{то (теор. 4-я) } \frac{v}{\pi x} : 2 = x^2 : 1; \text{ откуда: } x = \sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}.$$

IV. Изученіе процесса измѣненія функциї.

83. Описаніе пріема. Чтобы имѣть ясное представление о процессѣ измѣненія данной функциї при непрерывномъ возрастаніи аргумента x отъ $-\infty$ до $+\infty$ (или внутри данной ограниченной области), прежде всего раздѣляютъ всю эту область на такія отдѣльныя области, въ каждой изъ которыхъ данная функция существуетъ и непрерывна. Если, напр., данная функция представляетъ собою дробь, то эти отдѣльныя области не должны содержать въ себѣ тѣхъ значеній x , при которыхъ знаменатель дроби обращается въ нуль; точно также если функция содержитъ радикалы четныхъ степеней, то указанныя области не должны содержать значеній x , при которыхъ выраженія, стоящія подъ этими радикалами, дѣлаются отрицательными; и т. п. Затѣмъ находятъ, при какихъ значеніяхъ x данная функция получаетъ maximum и minimum, и, слѣд., при какихъ значеніяхъ x производная мѣняетъ

свой знакъ, переходя черезъ 0, или претерпѣвая разрывъ непрерывности. Расположивъ въ возрастающемъ порядкѣ эти значенія аргумента вмѣстѣ съ тѣми, которыя разграничидаютъ указанныя выше отдѣльныя области, тѣмъ самымъ подраздѣляютъ эти области на болѣе мелкіе промежутки, внутри которыхъ производная сохраняетъ свой знакъ. Послѣ этого, по знаку производной, опредѣляютъ, въ какихъ изъ этихъ промежутковъ данная функция возрастаетъ и въ какихъ убываетъ. Полезно еще опредѣлить предѣльныя значенія функциї при $x = -\infty$ и $x = +\infty$ (или крайнія значенія, если рассматривается измѣненіе функциї въ ограниченной области) и значеніе функциї при $x = 0$, а также опредѣлить, если можно, тѣ значенія аргумента, при которыхъ функция обращается въ 0.

Для ясности изображаютъ ходъ измѣненія функциї на чертежѣ помошью кривой.

84. Примѣръ. Для примѣра прослѣдимъ измѣненіе дроби:

$$y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2} = \frac{-(x-1)^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}$$

Дробь перестаетъ существовать, обращаясь въ ∞ , при такихъ значеніяхъ аргумента, которыя уничтожаютъ знаменателя, не уничтожая въ то же время числителя (въ противномъ случаѣ получилось бы неопределеннное выраженіе $\frac{0}{0}$, которое по изслѣдованію могло бы и не оказаться ∞).

Знаменатель нашей дроби обращается въ 0 при $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$; ни то, ни другое изъ этихъ значеній не обращаетъ въ 0 числителя; значитъ, при обоихъ этихъ значеніяхъ данная дробь перестаетъ существовать. При всѣхъ другихъ значеніяхъ аргумента она существуетъ и непрерывна. Такимъ образомъ мы раздѣляемъ всю безграничную область аргумента (отъ $-\infty$ до $+\infty$) на три отдѣльныя области, въ каждой изъ которыхъ функция существуетъ и непрерывна:

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \quad (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) \quad (+\sqrt{2}, +\infty).$$

Найдемъ теперь всѣ maximum и minimum данной функциї. Для этого составимъ ея производную:

$$y' = \frac{(-2x+2)(x^2-2)-2x(-x^2+2x-1)}{(x^2-2)^2} = -\frac{x^2+3x-2}{(x^2-2)^2}$$

и опредѣлимъ тѣ значения x , при которыхъ эта производная мѣняетъ знакъ, переходя черезъ 0 или претерпѣвая разрывъ непрерывности. Такъ какъ найденная производная есть дробь, то она можетъ обратиться въ 0 только при такихъ значенияхъ x , которая уничтожаютъ числителя, не уничтожая знаменателя. Изъ уравненія: $-x^2+3x-2=0$ находимъ, что такихъ значеній два: $x_1=1$ и $x_{11}=2$. Не находя второй производной, мы можемъ по виду первой производной опредѣлить, мѣняетъ ли она свой знакъ, и какъ мѣняетъ, при переходѣ x черезъ значения 1 и 2. Для этого примемъ во вниманіе, что знаменатель производной, т.-е. $(x^2-2)^2$, при всякомъ вещественномъ значеніи x есть число положительное (только при $x=\pm\sqrt{2}$ онъ равенъ 0), и потому знакъ производной одинаковъ со знакомъ ея числителя. Если же этого числителя представимъ такъ:

$$-x^2+3x-2=-(x^2-3x+2)=-(x-1)(x-2)$$

то легко сообразимъ, что въ области аргумента $(-\infty, 1)$ числитель отрицателенъ, въ области $(1, 2)$ онъ положителенъ и, наконецъ, въ области $(2, +\infty)$ опять становится отрицательнымъ. Значитъ, при переходѣ x черезъ значение 1 производная мѣняетъ знакъ—на+, а при переходѣ x черезъ значение 2 она мѣняетъ знакъ+на—; слѣд. при $x=1$ функція имѣеть minimum (онъ равенъ 0), а при $x=2$ maximum (онъ равенъ $-\frac{1}{2}$).

Значенія x , при которыхъ производная претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, суть тѣ, которые обращаютъ въ 0 знаменателя, не уничтожая числителя; такихъ значеній два:

$$x_1=-\sqrt{2} \text{ и } x_{11}=\sqrt{2}.$$

Первое значеніе принадлежитъ области $(-\infty, 1)$, въ которой, какъ мы видѣли выше, производная отрицательна; второе значеніе принадлежитъ области $(1, 2)$, въ которой производная положительна; слѣд., при переходѣ x черезъ значения $-\sqrt{2}$ и $+\sqrt{2}$ производная не мѣняетъ знака. Такимъ образомъ, производная мѣняетъ знакъ только при $x=1$ и $x=2$.

Расположимъ въ возрастающемъ порядке эти значенія вмѣстѣ съ тѣми, которые разграничиваютъ найденные выше 3 области:

$$-\infty, -\sqrt{2}, 1, +\sqrt{2}, 2, \infty$$

Мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующіе промежутки:

1-й 2-й 3-й 4-й 5-й

$$(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 1), (1, +\sqrt{2}), (+\sqrt{2}, 2), (2, \infty)$$

въ каждомъ изъ которыхъ производная сохраняетъ свой знакъ, а именно: въ первомъ и второмъ она отрицательна, въ третьемъ и четвертомъ положительна и въ пятомъ отрицательна; слѣд., данная функція убываетъ въ первомъ, второмъ и пятомъ промежуткахъ и возрастаетъ въ третьемъ и четвертомъ.

Найдемъ еще предѣльныя значенія дроби при $x=\pm\infty$; для этого представимъ ее подъ такимъ видомъ:

$$\frac{-x^2+3x-1}{x^2-2} = \frac{-1\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}}.$$

Отсюда находимъ, что при $x=\pm\infty$ дробь обращается въ -1 .

При $x=0$ дробь получаетъ значеніе $\frac{1}{2}$.

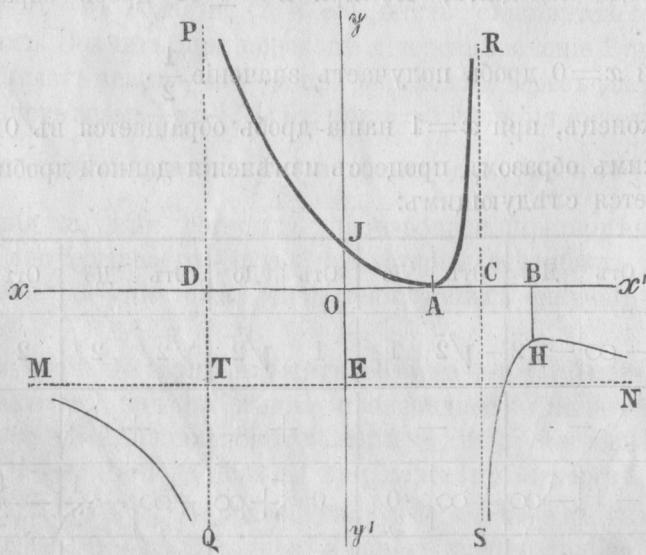
Наконецъ, при $x=1$ наша дробь обращается въ 0.

Такимъ образомъ процессъ измѣненія данной дроби представляется слѣдующимъ:

	Отъ	До	Отъ	До	Отъ	До	Отъ	До	Отъ	До
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	2	∞
y'	—	—	+	+	—	—	—	—	—	—
y	-1	$-\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	убываетъ	убываетъ	возрастаетъ	возрастаетъ	убываетъ	убываетъ	убываетъ	убываетъ	убываетъ	убываетъ

При возрастанії x отъ $-\infty$ до $-\sqrt{2}$, дробъ убываетъ отъ предѣльного значенія -1 до $-\infty$; при переходѣ x черезъ значение $-\sqrt{2}$, дробъ, претерпѣвая разрывъ непрерывности, скачкомъ переходитъ изъ $-\infty$ въ $+\infty$ и при возрастанії x отъ $-\sqrt{2}$ до 1 она продолжаетъ убывать отъ $+\infty$ до 0 (minimum), переходя черезъ значение $\frac{1}{2}$ при $x = 0$. Затѣмъ при возрастанії x отъ 1 до $+\sqrt{2}$ дробъ возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$; при $x = +\sqrt{2}$ дробъ вторично претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, переходя скачкомъ отъ $+\infty$ къ $-\infty$, и при возрастанії x отъ $+\sqrt{2}$ до 2 она продолжаетъ возрастать отъ $-\infty$ до $+\frac{1}{2}$ (maximum), а затѣмъ, при дальнѣйшемъ возрастанії x , дробъ убываетъ отъ $-\frac{1}{2}$ до предѣльного значенія -1 (котораго однако она не достигаетъ).

Ходъ измѣненія представляется болѣе нагляднымъ, когда мы изобразимъ разматриваемую функцию кривою (см. черт. 28-й,



Черт. 28.

на которомъ: $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = +\sqrt{2}$, $OD = -\sqrt{2}$, $OE = -1$, $OJ = +\frac{1}{2}$, $BH = -\frac{1}{2}$.

Вѣтви кривой, заключающейся въ пространствѣ $PDCR$, приближаются неограниченно близко къ прямымъ DP и CR , никогда, однако, ихъ не достигая. Точно такъ же кривая, лежащая въ углѣ MTQ , неограниченно близко приближается вѣтвями къ прямымъ TM и TQ , никогда ихъ не достигая. Такія прямые наз. асимптотами кривой. Для кривой, заключенной въ углѣ SCx , асимптотами служатъ прямые RS и MN .

V. Уравненіе касательной и нормали.

85. Уравненіе касательной. Пусть на данной кривой, выражаемой уравненіемъ $y = f(x)$, взята какая-нибудь точка, ординаты которой обозначимъ x_1 и y_1 , и черезъ эту точку проведена касательная къ кривой; требуется составить уравненіе этой касательной. Изъ аналитической геометріи известно, что уравненіе прямой, проходящей черезъ точку (x_1, y_1) , есть

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

гдѣ a есть неопределенный угловой коэффиціентъ, равный тангенсу угла, составленного этой прямой съ полуосью Ox . Но мы видѣли, что для касательной, проходящей черезъ точку (x_1, y_1) кривой $y = f(x)$, тангенсъ такого угла равенъ $y' = f'(x_1)$; слѣд., уравненіе искомой касательной должно быть:

$$y - y_1 = y'(x - x_1) \text{ т.-е. } y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

86. Уравненіе нормали. Нормально къ кривой въ данной ея точкѣ наз. прямая, проведенная черезъ эту точку перпендикулярно къ касательной, проходящей черезъ ту же точку кривой. Какъ известно изъ аналитической геометріи, необходимый и достаточный признакъ перпендикулярности двухъ прямыхъ состоитъ въ томъ, чтобы произведение ихъ угловыхъ коэффиціентовъ равнялось -1 . Такъ какъ угловой

коэффициентъ касательной, проведенной къ кривой $y=f(x)$ черезъ точку (x_1, y_1) , есть $f'(x_1)$, то, значитъ, угловой коэффициентъ нормали, проходящей черезъ ту же точку, долженъ быть $-\frac{1}{f'(x_1)}$, и потому уравненіе этой нормали есть

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

87. Касательная къ эллипсу. Уравненіе эллипса, оси котораго совпадаютъ съ осями кординатъ, есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [1]$$

гдѣ a есть величина большой полуоси, а b — малой полуоси. Чтобы составить уравненіе касательной, проведенной черезъ точку (x_1, y_1) эллипса, надо предварительно привести уравненіе [1] къ виду $y=f(x)$:

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)b^2 = \frac{(a^2 - x^2)b^2}{a^2}$$

и слѣд. $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ [2]

Положимъ, что взятая нами точка (x_1, y_1) лежитъ на верхней половинѣ эллипса; тогда изъ двухъ знаковъ выражения [2] мы должны взять только знакъ $+$, и поэтому

$$y' = \frac{b}{a} \left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \right) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Вмѣсто $\sqrt{a^2 - x^2}$ подставимъ выраженіе $\frac{ay}{b}$, взятое изъ ур. [2]:

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Слѣд., уравненіе касательной будетъ:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

или

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$$

что, по раздѣленіи всѣхъ членовъ на $a^2 b^2$, дастъ:

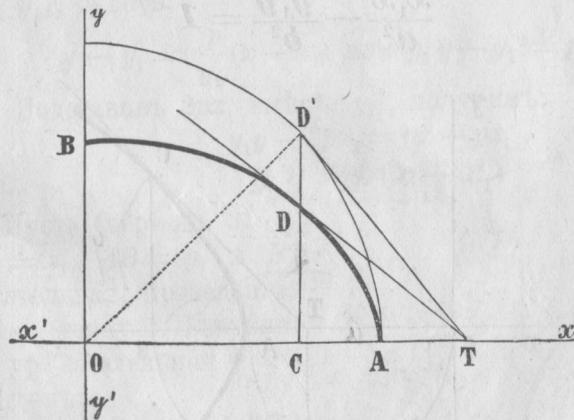
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

Правая часть этого равенства, согласно ур. [1], равна 1; поэтому уравненіе касательной окончательно выразится такъ:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad [3]$$

Въ такомъ видѣ оно легко запоминается, такъ какъ можетъ быть получено изъ уравненія эллипса [1] замѣною x^2 на $x_1 x$ и y^2 на $y_1 y$.

Пусть на черт. 29-мъ $OA=a$, $OB=b$, $OC=x_1$, $CD=y_1$, DT — касательная, проведенная черезъ точку D и пересѣкающая съ осью x -овъ въ точкѣ T . Положивъ въ уравненіи [3] $y=0$, мы получимъ: $OT = \frac{a^2}{x_1}$. Отсюда видно, что прямая $OA=a$ есть средняя пропорціональная между $x_1=OC$ и OT . Поэтому, чтобы построить касательную, изъ центра 0



Черт. 29.

радіусомъ OA засѣкаемъ въ точкѣ D' продолженіе прямой CD и проводимъ $D'T \perp OD'$. Такъ какъ въ прямоугольномъ тр.-кѣ $OD'T$ катетъ $OD'=a$ есть средняя пропорціональная между гипотенузой OT и прилежащимъ отрѣзкомъ OC ,

то OT и есть прямая, определяемая равенством: $OT = \frac{a^2}{x_1}$. Остается черезъ точки D и T провести прямую, которая и будетъ касательной къ эллипсу.

88. Касательная къ гиперболѣ. Уравненіе гиперболы, которой дѣйствительная ось совпадаетъ съ осью x -овъ, а мнимая съ осью y -ковъ, есть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [1]$$

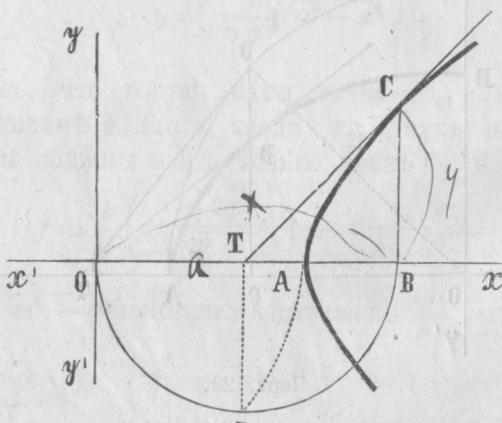
гдѣ a есть величина дѣйствительной полуоси, а b — мнимой.

Поступая совершенно такъ, какъ это было сдѣлано по отношенію къ эллипсу, мы получимъ для касательной, проведенной черезъ точку (x_1, y_1) гиперболы слѣдующее уравненіе:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

которое, такъ же какъ и для эллипса, преобразуется въ болѣе простое:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad [2]$$



Черт. 30.

Пусть (черт. 30) $OA = a$, $OB = x_1$, $BC = y_1$ и CT касательная, проведенная черезъ точку C . Положимъ въ ур. [2]

$y = 0$; найдемъ: $OT = \frac{a^2}{x_1}$. Отсюда видно, что прямая $OA = a$ есть средняя пропорциональная между $x_1 = OB$ и OT . Поэтому для построенія касательной описываемъ на OB полуокружность и изъ точки O , какъ центра, радиусомъ $OA = a$ засѣкаемъ ее въ точкѣ D ; опустивъ изъ D перпендикуляръ на OB , получимъ прямую OT , опредѣляемую равенствомъ $OT = \frac{a^2}{x_1}$. Остается провести черезъ точки T и C прямую, которая и будетъ касательной.

89. Касательная къ параболѣ. Уравненіе параболы, у которой вершина совпадаетъ съ началомъ координатъ и фокусъ расположенъ на оси x -овъ, есть

$$y^2 = 2px$$

Для точекъ параболы, лежащихъ на верхней ея вѣтви, получимъ:

$$y = +\sqrt{2px} \quad \text{и} \quad y' = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}} = \frac{p}{y}$$

Слѣд., уравненіе касательной, проведенной черезъ точку (x_1, y_1) , будеть:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1) \quad \text{или} \quad y_1 y - y_1^2 = px - px_1$$

Подставивъ $2px_1$ вместо y_1^2 , получимъ:

$$y_1 y - 2px_1 = px - px_1$$

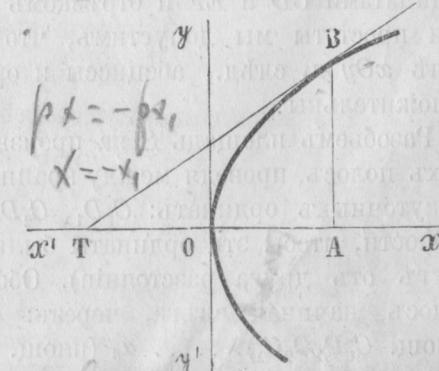
т.-е.

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

Пусть (чертежъ 31-й) $OA = x_1$, $AB = y_1$ и BT касательная, проведенная черезъ точку B . Положивъ въ ур. касательной $y = 0$, найдемъ:

$$OT = -x_1, \text{ т.-е. } OT = -OA.$$

Значить, отложивъ нальво отъ точки O прямую OT , равную OA , и проведя черезъ T и B прямую, мы получимъ касательную.



Черт. 31.

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$$

Проведя прямая параллельныя оси x -овъ: черезъ точку D до пересѣченія съ ординатой C_1D_1 , черезъ точку D_1 до пересѣченія съ ординатой C_2D_2 и т. д., мы получимъ n прямоугольниковъ, изъ которыхъ нѣкоторые (на нашемъ чертежѣ 3' слѣва) расположены всѣ внутри контура площади S , а другіе (2 справа) могутъ выступать нѣкоторою своею частью за предѣлы этого контура. Пусть площади этихъ прямоугольниковъ будуть (слѣва направо): $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$. Мы докажемъ, что если число n полосъ, на которыхъ мы разбили площадь S , неограниченно увеличивается (по какому бы то ни было закону), при чмъ ширина каждой полосы стремится къ 0 (также по какому бы то ни было закону), то сумма $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n$ стремится къ предѣлу, равному площади S . Для этого предварительно убѣдимся, что каждое изъ отношеній ряда:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \dots, \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}}, \frac{\alpha_n}{\beta_n} \quad [1]$$

стремится при этомъ къ 1. Возьмемъ какое-нибудь одно изъ этихъ отношеній, напр., $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$. Площадь α_2 , очевидно заключается между площадями двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ общее съ площадью α_2 основаніе C_1C_2 , а высоту: одинъ—наибольшую изъ всѣхъ ординат дуги D_1D_2 , другой—наименьшую изъ этихъ ординатъ.*). Обозначимъ первую черезъ H , а вторую черезъ h . Тогда можетъ написать:

$$C_1C_2 \cdot H > \alpha_2 > C_1C_2 \cdot h$$

Раздѣлимъ всѣ члены этого неравенства на площадь β_2 , которая равна произведенію $C_1C_2 \cdot C_1D_1$:

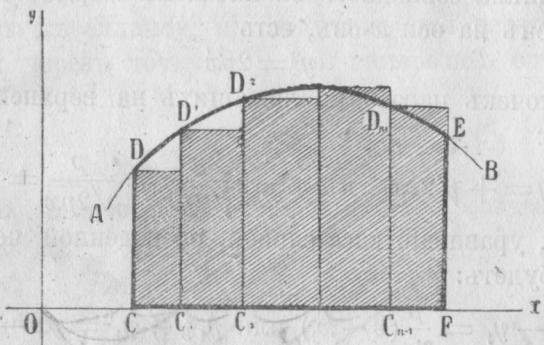
$$\frac{H}{C_1D_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2} > \frac{h}{C_1D_1} \quad [2]$$

*) Ординаты дуги D_1D_2 могутъ отъ D_1 къ D_2 или все возрастать, (какъ у насъ на чертежѣ), или все убывать (какъ на чертежѣ у дуги $D_{n-1}E$); но могутъ измѣняться и иначе, напр., сначала возрастать, а потомъ убывать или наоборотъ. Наше разсужденіе примѣнимо ко всѣмъ этимъ случаямъ.

Начала интегрального исчисления.

Определенный интегралъ.

ФО. Выражение площади помошью определенного интеграла.
Пусть непрерывная функция $y=f(x)$ геометрически изображается кривою AB (черт. 32). Посмотримъ, какъ можно оты-



Черт. 32.

скать величину S площади, ограниченной дугою DE , двумя ординатами CD и EF и отрѣзкомъ CF оси x -овъ, при чмъ для простоты мы допустимъ, что дуга DE вся лежить въ углѣ xOy и, слѣд., абсциссы и ординаты всѣхъ ея точекъ положительны.

Разобъемъ площадь S на произвольное число n вертикальныхъ полосъ, проведя между крайними ординатами $n-1$ промежуточныхъ ординатъ: $C_1D_1, C_2D_2, \dots, C_{n-1}D_{n-1}$ (нѣть надобности, чтобы эти ординаты были расположены на равномъ другъ отъ друга разстояніи). Обозначимъ площади этихъ полосъ, начиная слѣва, черезъ: α_1 (площадь CDD_1C_1), α_2 (площ. $C_1D_1D_2C_2$), \dots, α_n (площ. $C_{n-1}D_{n-1}EF$); тогда, очевидно:

Когда ширина каждой полосы стремится къ 0, ординаты H и h обѣ стремятся къ совпаденію съ ординатой C_1D_1 ; поэтому крайнія отношенія неравенства [2] стремятся въ предѣлъ къ 1, слѣд., и пред. $\frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1$. То же самое можетъ быть повторено о любомъ отношеніи ряда [1].

Изъ ученія о предѣлахъ мы знаемъ (§ 17), что если всѣ положительныя числа:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 & \dots & \beta_n \end{array}$$

стремятся къ 0, когда n неограниченно возрастаетъ, при чмъ каждое изъ отношеній:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

стремится къ 1 (условія эти у насъ выполнены), то предѣль отношенія:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n}$$

равенъ 1. Но $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = S$; слѣд.: пред. $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n)_n = \infty = S$

Обозначимъ теперь:

$$\begin{aligned} OC &= x_0, & OC_1 &= x_1, & OC_2 &= x_2, \dots, & OC_{n-1} &= x_{n-1}, & OF &= x' \\ OD &= f(x_0), & C_1D_1 &= f(x_1), \dots, & C_{n-1}D_{n-1} &= f(x_{n-1}), & EF &= f(x') \\ CC_1 &= \Delta x_0, & C_1C_2 &= \Delta x_1, & C_2C_3 &= \Delta x_2, \dots, & C_{n-1}F &= \Delta x_{n-1}. \end{aligned}$$

Изъ чертежа видно, что $\beta_1 = f(x_0) \Delta x_0$, $\beta_2 = f(x_1) \Delta x_1$ и т.д.

$$\text{Слѣд.: } S = \text{пред.} \left[f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_{n-1}) \Delta x_{n-1} \right]$$

или короче: $S = \text{пред.} \sum f(x) \Delta x$ [3]

т. е. площадь S есть предѣль суммы слагаемыхъ вида $f(x) \Delta x$, когда число этихъ слагаемыхъ безпредѣльно увеличивается, а каждое слагаемое стремится къ 0, при чмъ аргументу x даются значения, начиная съ x_0 и кончая x' .

Предѣлы такихъ суммъ приходится находить весьма часто. Для нихъ ввели особое обозначеніе, а именно вмѣсто равенства [3] пишутъ такъ:

$$S = \int_{x_0}^{x'} f(x) dx \quad [4]$$

Здѣсь знакъ \int , называемый знакомъ интеграла *),

уже включаетъ собою, по условію, слово „предѣль“; числа, стоящія у концовъ этого знака, представляютъ собою границы (предѣлы), между которыми измѣняется перемѣнное число x : внизу ставится начальное значеніе x_0 , а наверху конечное значеніе x' . Замѣною Δx на dx желаютъ указать, что всѣ Δx предполагаются безконечно малыми, т.-е. стремящимися къ 0. Выраженіе, стоящее въ правой части равенства [2], наз. „опредѣленный интегралъ отъ функции $f(x)$, взятый между границами x_0 и $x'\")$; здѣсь слово „опредѣленный“ употребляется для отличія этого интеграла отъ такъ называемаго „неопредѣленного“, о которомъ мы будемъ говорить позже.

Функция $f(x)$, отъ которой берется интеграль, наз. подынтегральною функциею.

Итакъ, нахожденіе криволинейной площади $CDEF$ (чер. 32-й) приводится къ вычисленію нѣкотораго опредѣленного интеграла отъ данной подынтегральной функции. Многіе другіе вопросы сводятся къ тому же. Приведемъ еще одинъ примѣръ.

91. По формулѣ скорости опредѣлить длину пути. Пусть $v = f(t)$ есть функция, выражающая зависимость между скоростью v нѣкотораго движенія и временемъ t , считаемымъ отъ условленнаго начальнаго момента. Требуется, зная эту зависимость, опредѣлить величину e пути, проходимаго движущимся тѣломъ въ промежутокъ времени отъ t_0 до $t' > t_0$.

*) Этотъ знакъ представляетъ собою удлиненную букву S , начальную букву слова „summa“; слово „интеграль“ происходитъ отъ латинскаго слова „integer“—цѣлый. Знакъ интеграла введенъ Лейбницемъ (1675 г.).

Разобьемъ этотъ промежутокъ на n частей (нѣть надобности, чтобы эти части были равны между собою), вставивъ между t_0 и t' рядъ $n - 1$ промежуточныхъ возрастающихъ значеній времени: $t_1, t_2, t_3 \dots t_{n-1}$. Продолжительность первого промежутка, равную $t_1 - t_0$, обозначимъ для краткости черезъ Δt_0 , продолжительность второго промежутка, равную $t_2 - t_1$, обозначимъ Δt_1 и т. д. до послѣдняго промежутка Δt_{n-1} . Пути, проходимые въ теченіе каждого изъ этихъ промежутковъ, пусть будутъ (начиная съ первого промежутка): $e_1, e_2, e_3 \dots e_n$. Тогда

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n.$$

Вообразимъ теперь, что вмѣсто даннаго движенія, въ которомъ скорость непрерывно измѣняется отъ момента къ моменту, мы имѣемъ другое, воображаемое, движеніе, въ которомъ скорость въ теченіе каждого изъ взятыхъ нами n промежутковъ не измѣняется, сохраняя ту величину, которую въ данномъ, дѣйствительномъ, движеніи она имѣть лишь въ началѣ каждого промежутка, но зато, при переходѣ отъ одного промежутка къ слѣдующему, скорость сразу, скачкомъ, измѣняется, приобрѣтая значение, соотвѣтствующее началу этого слѣдующаго промежутка; такимъ образомъ, мы предположимъ, что въ теченіе всего первого промежутка времени Δt_0 скорость остается $f(t_0)$, при переходѣ отъ первого промежутка ко второму она сразу дѣлается $f(t_1)$ и такою остается въ теченіе всего второго промежутка Δt_1 , при переходѣ къ третьему промежутку она дѣлается $f(t_2)$ и остается такою во весь третій промежутокъ Δt_2 и т. д.

Пусть пути, проходимыя тѣломъ при этомъ воображаемомъ движеніи въ теченіе отдѣльныхъ промежутковъ времени, будутъ (начиная съ первого промежутка): $e'_1, e'_2, e'_3 \dots e'_n$. Докажемъ, что если число n промежутковъ, на которые мы разбили время отъ t_0 до t' , неограниченно увеличивается, при чёмъ продолжительность каждого промежутка стремится къ O , то сумма $e'_1 + e'_2 + e'_3 + \dots + e'_n$ стремится къ предѣлу, равному суммѣ $e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n$, т.-е. e . Для этого предварительно убѣдимся, что каждое изъ отношеній

$$\frac{e_1}{e'_1}, \frac{e_2}{e'_2}, \frac{e_3}{e'_3} \dots \frac{e_n}{e'_n} [1]$$

стремится къ 1. Возьмемъ какое-нибудь одно изъ этихъ отношеній, напр. $\frac{e_2}{e'_2}$. Въ теченіе промежутка Δt_1 , въ который проходится дѣйствительнымъ движеніемъ путь e_2 , скорость непрерывно измѣнялась; она могла или все возрастать, или все убывать, или измѣняться какъ-нибудь иначе. Пусть наибольшая изъ всѣхъ скоростей, которая были въ теченіе этого промежутка, была W , а наименьшая w . Тогда очевидно, что путь e_2 долженъ быть меньше произведенія $W \cdot \Delta t_1$, означающаго величину пути, который быль бы пройденъ тѣломъ за промежутокъ Δt_1 , если бы оно двигалось равномѣрно со скоростью W ; и въ то же время путь e_2 долженъ быть больше произведенія $w \cdot \Delta t_1$, означающаго величину пути, который прошло бы тѣло за промежутокъ Δt_1 , если бы оно двигалось равномѣрно со скоростью w . Такимъ образомъ:

$$W \cdot \Delta t_1 > e_2 > w \cdot \Delta t_1.$$

Раздѣлимъ всѣ члены этого неравенства на путь e'_2 , равный $f(t_1) \cdot \Delta t_1$:

$$\frac{W}{f(t_1)} > \frac{e_2}{e'_2} > \frac{w}{f(t_1)}$$

Если продолжительность промежутка Δt_1 стремится къ O , то скорости W и w стремятся къ равенству съ $f(t_1)$; слѣд., крайнія отношенія выведенаго неравенства имѣютъ предѣломъ 1; поэтому и

$$\text{пред. } \frac{e_2}{e'_2} = 1$$

Такъ какъ это разсужденіе можно примѣнить къ каждому изъ отношеній ряда [1], то на основаніи ученія о предѣлахъ (§ 17), заключаемъ, что

$$\text{пред. } \frac{e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n}{e'_1 + e'_2 + e'_3 + \dots + e'_n} = 1$$

Откуда: пред. $(e'_1 + e'_2 + \dots + e'_n) = e_1 + e_2 + \dots + e_n = e$

Такъ какъ по закону равномѣрнаго движенія

$$e'_1 = f(t_0) \Delta t_0, e'_2 = f(t_1) \Delta t_1 \dots e'_n = f(t_{n-1}) \Delta t_{n-1}$$

то можемъ написать:

$e = \text{пред. } [f(t_0)\Delta t_0 + f(t_1)\Delta t_1 + f(t_2)\Delta t_2 + \dots + f(t_{n-1})\Delta t_{n-1}]$,
когда всѣ Δt стремятся къ O и t_{n-1} стремится къ t' .

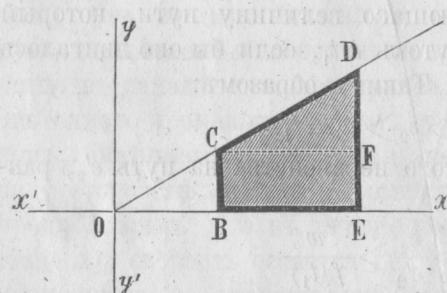
По принятому раньше обозначенію это можно выразить такъ:

$$e = \int_{t_0}^{t'} f(t) dt$$

мыегралов

92. Вычислениe определенныхъ интеграловъ, какъ предѣла суммъ. Определенные интегралы можно иногда вычислять, исходя изъ ихъ определенія, какъ предѣла нѣкоторыхъ суммъ. Приведемъ этому примѣры.

I. Какъ известно изъ аналитической геометріи, уравненіе $y = ax$ выражаетъ прямую OA (черт. 33), проходящую черезъ



Черт. 33.

начало координатъ. Найдемъ площадь $BCDE$, ограниченную слѣва ординатою BC , соответствующею абсциссѣ $OB = x_0$, справа ординатою DE , у которой абсцисса $OE = x'$, сверху прямой CD и снизу отрѣзкомъ BE оси x -овъ. Мы нарочно взяли такой примѣръ, когда опредѣляемую площадь можно найти помошью элементарной геометріи; опредѣливъ ее теперь при посредствѣ определенного интеграла, мы будемъ имѣть возможность провѣрить результатъ.

На основаніи изложеннаго выше, искомая площадь равна

$$\int_{x_0}^{x'} ax dx = \text{пред. } [ax_0\Delta x_0 + ax_1\Delta x_1 + \dots + ax_{n-1}\Delta x_{n-1}]$$

гдѣ $x_1 = x_0 + \Delta x_0$, $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, \dots , $x' = x_{n-1} + \Delta x_{n-1}$

Для упрощенія нахожденія величины интеграла мы предположимъ всѣ Δx равными, т.-е. допустимъ, что

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_{n-1} = \frac{x' - x_0}{n}$$

Обозначивъ для краткости величину каждого изъ этихъ приращеній черезъ h , можемъ написать:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x'} ax dx &= \text{пред. } \left\{ ax_0 h + a(x_0 + h)h + a(x_0 + 2h)h + \dots \right. \\ &\quad \left. + a[x_0 + (n-1)h]h \right\} = \text{пред. } \left\{ ax_0 hn + ah^2 [1+2+3+\dots+(n-1)] \right\} \\ &= \text{пред. } \left\{ ax_0 hn + ah^2 \frac{n(n-1)}{2} \right\} = \text{пред. } \left\{ ax_0 hn + \frac{ah^2 n^2}{2} - \frac{ah^2 n}{2} \right\} \end{aligned}$$

Изъ равенства $\frac{x' - x_0}{n} = h$ находимъ: $nh = x' - x_0$; значитъ:

$$\int_{x_0}^{x'} ax dx = \text{пред. } \left\{ ax_0(x' - x_0) + \frac{1}{2}a(x' - x_0)^2 - \frac{1}{2}a(x' - x_0)h \right\}$$

Когда h стремится къ 0, послѣдній членъ этого выраженія также стремится къ 0; поэтому

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x'} ax dx &= ax_0(x' - x_0) + \frac{1}{2}a(x' - x_0)^2 \\ &= (x' - x_0) \left[ax_0 + \frac{1}{2}a(x' - x_0) \right] \end{aligned}$$

Обращаясь къ чертежу, видимъ, что $x' - x_0 = BE$, $ax_0 = BC$ и $a(x' - x_0) = ax' - ax_0 = ED - BC = DF$. Слѣд., искомая площадь равна:

$$BE \left(BC + \frac{1}{2}DF \right) = BE \cdot BC + \frac{1}{2}BE \cdot DF$$

что подтверждается теоремами элем. геометріи, такъ какъ $BE \cdot BC$ есть площадь прямоугольника $BCJE$, а $\frac{1}{2}BE \cdot DF = \frac{1}{2}CF \cdot DF$ выражаетъ площадь тр.-ка CDF .

II. Зная, что скорость v при свободномъ паденіи тѣла въ зависимости отъ времени t паденія выражается уравненіемъ

$v = gt$, где g есть постоянное для данной мѣстности ускорение при паденіи, опредѣлимъ величину H пути (высоту паденія), проходимаго падающимъ тѣломъ въ теченіе T секундъ отъ начала паденія, т.-е. вычислимъ опредѣленный интеграль $\int_0^T gt dt$. Положимъ, что всѣ Δt одинаковы, а именно, пусть $\Delta t = \frac{T}{n}$. Тогда искомый интеграль есть предѣль суммы:

$$\begin{aligned} g.0. & \frac{T}{n} + g \frac{T}{n} \cdot \frac{T}{n} + g \frac{2T}{n} \cdot \frac{T}{n} + \dots + g \frac{(n-1)T}{n} \cdot \frac{T}{n} \\ &= \frac{gT^2}{n^2} \left[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) \right] = \frac{gT^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} gT^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

что при $n = \infty$ равно $\frac{1}{2} gT^2$; значитъ: $H = \frac{1}{2} gT^2$. Мы получили такимъ образомъ формулу, извѣстную изъ физики.

93. Важное свойство опредѣленного интеграла. Вычислениѳ опредѣленного интеграла такимъ пріемомъ, который былъ примѣненъ нами въ двухъ приведенныхъ выше примѣрахъ, удается только въ рѣдкихъ случаяхъ. Существуетъ болѣе простой и болѣе общій способъ нахожденія величины интеграла. Для уясненія его предварительно установимъ одно важное свойство опредѣленного интеграла.

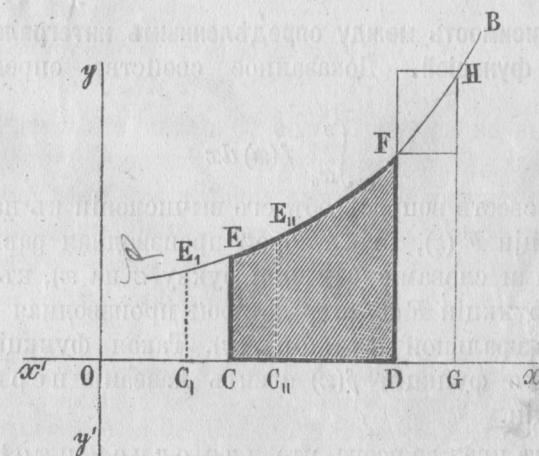
Пусть $\int_{x_0}^{x'} f(x) dx$ есть опред. интеграль отъ функциї $f(x)$, непрерывной въ области аргумента, которой принадлежать границы его x_0 и x' . Представимъ себѣ, что при постоянной нижней границѣ x_0 этого интеграла верхняя его граница x' дѣлается числомъ переменнымъ, измѣняющимся однако въ области аргумента, для которой $f(x)$ непрерывна. Обозначимъ тогда переменную верхнюю границу какою-нибудь иною буквою, напр., буквою z . Конечно, величина интеграла $\int_{x_0}^z f(x) dx$ измѣняется въ зависимости отъ того или другого значенія его переменной границы z , т.-е.

она есть нѣкоторая функция отъ z . Обозначимъ ее черезъ $F(z)$, т.-е. положимъ, что

$$F(z) = \int_{x_0}^z f(x) dx$$

Докажемъ, что производная $F'(z)$ отъ функциї $F(z)$ равна $f(z)$; другими словами докажемъ, что производная отъ опредѣленного интеграла, разматриваемаго, какъ функция его верхней границы, равна подъинтегральной функции, въ которой аргументъ замѣненъ верхней границей интеграла.

Такъ какъ, по условію, функция $f(x)$ непрерывна, то ее можно выразить геометрически нѣкоторою непрерывною кривою AB (черт. 34). Пусть $OC = x_0$ и $OD = z$. Проведя ординаты $CE = f(x_0)$ и $DF = f(z)$, мы получимъ площадь $CFDE$, величина которой, по доказанному прежде, выражается даннымъ интеграломъ $\int_{x_0}^z f(x) dx$. При неизмѣнной абсциссѣ $OC = x_0$ и измѣняющейся абсциссѣ $OD = z$ эта площадь есть



Черт. 34.

функция отъ z , которую мы обозначили выше черезъ $F(z)$. Найдемъ производную этой функции. Дадимъ аргументу z

безконечно малое приращение $\Delta z = DG$, настолько малое, чтобы внутри области $(z, z + \Delta z)$ ординаты кривой изменились однообразно, т.-е. или увеличивались (какъ у насъ на чертежѣ), или уменьшались: Тогда $F(z)$ получить приращение $\Delta F(z)$, выражющее величину площади $DFHG$, если GH есть ордината, соответствующая абсциссѣ $OG = z + \Delta z$. Приведя черезъ F и H прямые, параллельныя оси x -овъ, мы получимъ два прямоугольника, между которыми заключается площадь $DFHG$. Такъ какъ площ. прям. $FG = DF$. $DG = f(z) \Delta z$, а пл. прям. $DH = GH$. $DG = f(z + \Delta z) \Delta z$, то

$$f(z + \Delta z) \Delta z > \Delta F(z) > f(z) \Delta z$$

Раздѣливъ всѣ члены неравенства на Δz , получимъ:

$$f(z + \Delta z) > \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} > f(z)$$

Когда Δz стремится къ 0, $f(z + \Delta z)$ стремится къ $f(z)$, а отношение $\frac{\Delta F(z)}{\Delta z}$ стремится къ предѣлу $F'(z)$, и такъ какъ оно постоянно заключается между $f(z + \Delta z)$ и $f(z)$, то

$$\text{пред. } \frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = F'(z) = f(z)$$

94. Зависимость между определеннымъ интеграломъ и первообразной функцией. Доказанное свойство определенного интеграла

$$\int_{x_0}^z f(x) dx$$

позволяетъ свести вопросъ объ его вычислениі къ нахожденю такой функции $F(z)$, отъ которой производная равнялась бы $f(z)$; другими словами (замѣнивъ букву z на x), къ нахождениі такой функции $F(x)$, отъ которой производная равнялась бы подѣнтегральной функции $f(x)$. Такая функция $F(x)$ по отношеню къ функции $f(x)$ носить название первообразной функции.

Замѣтимъ прежде всего, что для одной и той же данной функции $f(x)$ существуетъ безчисленноемножество первообразныхъ функций. Въ самомъ дѣлѣ, если $F(x)$ есть некоторая первообразная функция для $f(x)$,

т.-е., если $F'(x) = f(x)$, то за первообразную функцию для $f(x)$ можетъ быть принята также и всякая другая функция, отличающаяся отъ $F(x)$ постояннымъ (независящимъ отъ x) слагаемымъ, напр., $F(x) \pm 1$, $F(x) \pm 5$, $F(x) \pm \pi \dots$ вообще $F(x) + C$, гдѣ C есть какое угодно положительное или отрицательное постоянное число (*constans* — постоянный); дѣйствительно, производная отъ функции $F(x) + C$ есть та же самая, что и отъ функции $F(x)$, такъ какъ производная отъ постоянного числа C равна 0. *)

Однако эта неопределеннность первообразной функции не служить препятствиемъ, какъ мы сейчасъ увидимъ, къ нахожденю величины определенного интеграла. Положимъ, что какимъ-нибудь путемъ мы нашли для подѣнтегральной функции $f(x)$ одну изъ первообразныхъ функций, безразлично какую; пусть это будетъ $\varphi(x)$. Тогда мы можемъ утверждать, что интегралъ $\int_{x_0}^z f(x) dx$ или равенъ функции $\varphi(z)$, или разнится отъ нея на некоторое число, не зависящее отъ z ; обозначивъ это неизвѣстное число черезъ C , можемъ написать:

$$\int_{x_0}^z f(x) dx = \varphi(z) + C \quad [1]$$

Мы найдемъ это число C , если примемъ во вниманіе, что определенный интеграль уничтожается, когда верхняя его граница дѣлается равной нижней границѣ, такъ какъ площадь, ограниченная справа и слѣва двумя сливающимися ординатами, равна 0. Если теперь въ равенствѣ [1] положимъ $z = x_0$, то получимъ:

*) Это же можно усмотрѣть и изъ чертежа 34-го. Если для площади $CDFE$, выражющей функцию $F(z)$, производной служить $f(z) = DF$, то та же самая производная будетъ и для всякой другой площади $C_1 DFE_1$, $C_2 DFE_2 \dots$, отличающейся отъ пл. $CDFE$ только тѣмъ, что вмѣсто начальной ординаты CE берется какая-нибудь иная постоянная ордината $C_1 E_1$, $C_2 E_2$ и т. д. Величина всѣхъ этихъ площадей выражается, очевидно, функцией $F(z)$, къ которой прибавлено какое-нибудь независящее отъ z положительное или отрицательное число C (выражющее по абе. величинѣ плош. $CC_1 E_1 E$, или плош. $CC_2 E_2 E$ и т. д.).

$$0 = \varphi(x_0) + C \text{ откуда: } C = -\varphi(x_0)$$

и слѣд.: $\int_{x_0}^z f(x) dx = \varphi(z) - \varphi(x_0)$

Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующему важному выводу: определенный интегралъ равенъ приращению, которое получаетъ какая-нибудь изъ первообразныхъ функций при переходѣ аргумента отъ значения, равнаго нижней границѣ интеграла, къ значению, равному верхней его границѣ.

95. Примѣнение этого свойства къ вычислению определенного интеграла. Это свойство интеграла даетъ возможность вычислять его помощью первообразной функции, если таковую мы какимъ-нибудь способомъ нашли. Примѣнимъ этотъ приемъ къ тѣмъ двумъ интеграламъ, которые мы раньше вычислили другимъ путемъ (§ 92).

1º. Вычислить $\int_{x_0}^{x'} ax dx$.

Одною изъ первообразныхъ функций для ax , какъ не трудно догадаться, будетъ, $\frac{1}{2}ax^2$ (производная отъ этого одночлена равна $\frac{1}{2} \cdot 2ax^{2-1} = ax$). Значить:

$$\int_{x_0}^{x'} ax dx = \frac{1}{2}a(x')^2 - \frac{1}{2}ax_0^2$$

(т.-е. площадь трапеции $BCDE$, черт. 33-й, равна площади тр.-ка EOD безъ площади тр.-ка BOC).

2º. Вычислить $\int_0^T gtdt$

Одна изъ первообразныхъ функций для gt есть $\frac{1}{2}gt^2$; поэтому:

$$\int_0^T gtdt = \frac{1}{2}gT^2 - \frac{1}{2}g \cdot 0^2 = \frac{1}{2}gT^2$$

$$\int_{x_0}^z f(x) dx = \varphi(z) - \varphi(x_0) \quad - 133 -$$

Неопределенный интегралъ.

96. Понятіе о неопределенномъ интегралѣ. Изъ равенства $\int_{x_0}^z f(x) dx = \varphi(z) - \varphi(x_0)$ мы усматриваемъ (читая его справа на лѣво), что приращеніе первообразной функции $\varphi(x)$ при измѣненіи аргумента отъ x_0 до z (каковы бы ни были эти значения аргумента, лишь бы они принадлежали области, внутри которой функция $f(x)$ непрерывна) выражается определеннымъ интеграломъ отъ функции $f(x)$, равной $\varphi'(x)$, и, слѣд., оно можетъ быть получено суммированіемъ дифференціаловъ первообразной функции (такъ какъ $f(x) dx = \varphi'(x) dx$, т.-е. $f(x) dx$ есть дифференціалъ функции $\varphi(x)$). Поэтому первообразную функцию для данной функции $f(x)$ принято обозначать тѣмъ же знакомъ интеграла, какимъ обозначается определенный интегралъ, но только безъ указанія границъ; такимъ образомъ, выраженіе

$$\int f(x) dx$$

есть общее обозначеніе для всѣхъ тѣхъ функций, которыхъ производные равны $f(x)$, и которыхъ, слѣд., дифференціалы равны подынтегральному выражению $f(x) dx$. Если $\varphi(x)$ есть одна изъ такихъ функций, то можемъ написать равенство:

$$\int f(x) dx = \varphi(x) + C$$

гдѣ C есть любое число, не зависящее отъ x . Вслѣдствіе неопределенности этого числа C выраженіе $\int f(x) dx$ принято называть неопределеннымъ интеграломъ.

Изъ опредѣленія неопределенного интеграла слѣдуетъ:

1) $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$ и слѣд. $d \int f(x) dx = f(x) dx$

Такимъ образомъ, знакъ дифференцированія (d) уничтожаетъ знакъ интегрированія (\int) .

$$2) \int f'(x) dx = \int d[f(x)] = f(x) + C$$

Такимъ образомъ, знакъ интегрированія уничтожаетъ знакъ дифференцированія, но при этомъ вводить неопределеннное постоянное число C .

Изъ этого слѣдуетъ, что дифференцированіе и интегрированіе суть два обратныхъ дѣйствія, подобныя, напр., возведенію въ степень и извлечению корня.

Нахожденіе неопределенныхъ интеграловъ отъ данныхъ функций, или интегрированіе функций, составляеть часть такъ называемаго интегрального исчисленія, съ основами котораго мы теперь ознакомимся.

97. Основные формулы интегрированія. Зная основные формулы дифференцированія, легко установить соответствующія основные формулы интегрированія. Такихъ формулъ мы указаемъ 10 слѣдующихъ:

Такъ какъ

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n \quad | \quad \text{то}$$

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(если число n не равно -1)

$$\left(\frac{a^x}{\log a} \right)' = \frac{a^x \log a}{\log a} = a^x \quad | \quad 2) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$(e^x)' = e^x \quad | \quad 3) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad | \quad 4) \int \frac{dx}{x} = \log x + C$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad | \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x \quad | \quad 6) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad | \quad 7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$(-\operatorname{cotg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x} \quad | \quad 8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\begin{cases} (\arcsin x)' \\ (-\arccos x)' \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad | \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\arctg x)' \\ (-\operatorname{arc cotg} x)' \end{cases} = \frac{1}{1+x^2} \quad | \quad 10) \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \arctg x + C \\ -\operatorname{arc cotg} x + C \end{cases}$$

Замѣчаніе. Не должно удивляться, что въ формулахъ 9-й и 10-й результатъ интегрированія выраженъ двояко; это показываетъ только, что функции $(\arcsin x + C)$ и $(-\arccos x + C)$, а также и функции $(\arctg x + C)$ и $(-\operatorname{arc cotg} x + C)$, какъ имѣющія одну и ту же производную, должны или равняться другъ другу, или различаться между собою на постоянное число (\S 46, слѣдствіе). И дѣйствительно, разность функций $\arcsin x$ и $-\arccos x$ (т. е. сумма $\arcsin x + \arccos x$) равна постоянному числу $\frac{\pi}{2}$ и разность постоянныхъ чиселъ C , входящихъ въ формулы, также есть постоянное число; то же самое можно сказать о разности результатовъ интегрированія формулы 10-й.

98. Вынесение постоянного множителя за знакъ интеграла. Постоянный множитель можетъ быть вынесенъ за знакъ интеграла, какъ опредѣленнаго, такъ и неопределеннаго.

10. Определенный интегралъ $\int_a^b Af(x)dx$ представляетъ собою, по опредѣленію, предѣль суммы $\Sigma Af(x)dx$, каждое слаг-

гаемое которой содержать множителя A ; если вынесемъ этого множителя за скобки, то получимъ произведение $A\Sigma f(x)dx$; но, если A есть постоянное число, то:

$$\text{пред. } (A\Sigma f(x)dx) = A \left(\text{пред. } \Sigma f(x)dx \right) = A \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{Слѣд. } \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

2º. Неопределенный интегралъ $\int Af(x)dx$, при A постоянномъ, можетъ быть замѣненъ произведениемъ $A \int f(x)dx$, такъ какъ производная отъ этого произведения есть:

$$\left[A \int f(x)dx \right]' = A \left[\int f(x)dx \right]' = Af(x)$$

т.-е. она равна подъ интегральной функции неопределенного интеграла.

Замѣтимъ, что равенство:

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$$

какъ и вообще равенство двухъ какихъ-либо выражений, содержащихъ неопределенные интегралы, должно быть понимаемо въ томъ смыслѣ, что каждое изъ значений лѣвой части равенства равно каждому изъ значений правой его части, сложенному съ некоторымъ постояннымъ числомъ.

$$\begin{aligned} \text{Примѣръ: } \int 3\sqrt{x}dx &= 3 \int x^{\frac{1}{2}}dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Замѣчаніе. Можно было бы подумать, что этотъ результатъ не вѣренъ, такъ какъ слѣдовало бы писать:

$$3 \int x^{\frac{1}{2}}dx = 3 \left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \right) = 2x\sqrt{x} + 3C.$$

Но такъ какъ C есть число произвольное, то безпользно писать $3C$, такъ какъ $3C$ означало бы не болѣе, чѣмъ просто C . Это замѣчаніе можетъ быть примѣнено ко многимъ примѣрамъ интегрированія, приводимымъ ниже.

99. Интеграль суммы. Интеграль (определенный и неопределенный) алгебраической суммы несколькиихъ функций равенъ алгебраической суммѣ интеграловъ этихъ функций.

1º. Определенный интеграль

$$\int_a^b [f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)]dx$$

согласно определению, представляетъ собою предѣль суммы:

$$\Sigma [f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)]dx \quad [1]$$

которая можетъ быть представлена такъ:

$$\Sigma f(x)dx + \Sigma f_1(x)dx - \Sigma f_{11}(x)dx \quad [2]$$

и, слѣд., предѣль суммы [1] равенъ алгебраической суммѣ предѣловъ слагаемыхъ суммы [2]; а это значитъ, что:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)]dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f_1(x)dx - \\ &\quad - \int_a^b f_{11}(x)dx. \end{aligned}$$

2º. Неопределенный интеграль

$$\int [f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)]dx \quad [3]$$

можетъ быть замѣненъ алгебраическою суммою:

$$\int f(x)dx + \int f_1(x)dx - \int f_{11}(x)dx \quad [4]$$

такъ какъ производная этой суммы равна $f(x) + f_1(x) - f_{11}(x)$, т.-е. равна подъинтегральной функции интеграла [3].

Примѣръ: $\int (ax^2 + bx + c)dx = \int ax^2 dx + \int bxdx + \int cdx = a \int x^2 dx + b \int xdx + c \int dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + C.$

Нѣкоторые пріемы интегрированія.

100. Введеніе вспомогательной переменной. Иногда бываетъ полезно ввести вспомогательную переменную, связанную съ данной переменной нѣкоторымъ уравненіемъ; отъ этого подъ знакомъ интеграла можетъ оказаться такая функция, которую интегрировать мы умѣемъ. Найдя эту интеграль, мы затѣмъ введемъ въ него прежнюю переменную.

Примѣры. 1) Найти $\int \frac{dx}{x+a}$.

Введеніе новый аргументъ u , связанный съ x уравненіемъ: $x+a=u$; тогда $dx=du$ и потому:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{du}{u} = \text{Log } u + C.$$

Замѣтивъ теперь u на $x+a$, окончательно получимъ:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \text{Log}(x+a) + C.$$

Подобно этому найдемъ, что

$$2) \int \frac{dx}{x-a} = \text{Log}(x-a) + C.$$

$$3) \text{Найти } \int \cos(x+a)dx.$$

Положимъ $x+a=u$; тогда $dx=du$ и

$$\int \cos(x+a)dx = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(x+a) + C.$$

Подобно этому найдемъ, что

$$4) \int \sin(x+a)dx = -\cos(x+a) + C.$$

$$5) \text{Найти } \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

Пусть $\cos x=u$; тогда $(-\sin x)dx=du$ и, слѣд., $\sin x dx = -du$. Поэтому:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{-du}{u} = - \int \frac{du}{u} = -\text{Log } u + C = \\ &= -\text{Log}(\cos x) + C \end{aligned}$$

Подобно этому найдемъ:

$$6) \int \operatorname{cotg} x dx = \text{Log}(\sin x) + C$$

$$7) \text{Найти } \int \sqrt{1-\cos x} dx$$

Такъ какъ $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, то

$$1 - \cos x = 1 - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Поэтому: } \int \sqrt{1-\cos x} dx &= \int \sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \\ &= \sqrt{2} \int \sin \frac{x}{2} dx \end{aligned}$$

Положимъ теперь $\frac{x}{2}=u$, откуда $x=2u$ и $dx=2 du$. Тогда:

$$\int \sqrt{1-\cos x} dx = 2\sqrt{2} \int \sin u du = -2\sqrt{2} \cos u + C = -2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} + C.$$

Подобно этому найдемъ:

$$8) \int \sqrt{1+\cos x} dx = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + C.$$

$$9) \text{ Найти } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\text{Очевидно, что } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

Положимъ $\frac{x}{a}=u$; тогда:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Подобно этому найдемъ:

~~$$10) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C.$$~~

101. Интегрированіе по частямъ. Пусть u и v будуть 2 функциіи отъ аргумента x , допускающія дифференціалы du и dv . Тогда, какъ мы знаемъ изъ правилъ дифференціального исчисления:

$$d(uv)=u dv+vdu$$

Откуда: $udv=d(uv)-vdu$

$$\text{и, слѣд.: } \int udv = \int [d(uv)-vdu] = \int d(uv) - \int vdu \\ \int udv = uv - \int vdu$$

Мы получили такимъ образомъ то, что называется формулой интегрированія по частямъ. Эта формула позволяетъ нахожденіе интеграла отъ udv свести на нахожденіе другого интеграла отъ $v du$, что иногда бываетъ проще.

Примѣры. 1) Найти $\int \operatorname{Log} x dx$.

Положимъ $\operatorname{Log} x=u$, $dx=dv$; тогда $du=\frac{dx}{x}$ и $v=x$; слѣд.:

$$\int \operatorname{Log} x dx = x \operatorname{Log} x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \operatorname{Log} x - \int dx = x \operatorname{Log} x - x + C.$$

2) Найти $\int x \sin x dx$.

Пусть $x=u$, $\sin x dx=dv$; тогда $du=dx$ и $v=-\cos x$. Слѣд.:

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

3) Найти $\int \operatorname{arc sin} x dx$.

Положимъ $\operatorname{arc sin} x=u$, $dx=dv$; тогда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad v=x.$$

$$\text{Слѣд.: } \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Но

$$\int \frac{-x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\left(\text{такъ какъ } (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\text{Поэтому: } \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$4) \text{ Найти } \int \cos x \, dx.$$

Пусть $\cos x = u$, $\cos x \, dx = dv$; тогда $du = -\sin x \, dx$ и $v = \sin x$. Слѣд.:

$$\begin{aligned} \int \cos x^2 \, dx &= \sin x \cdot \cos x - \int \sin x (-\sin x \, dx) = \sin x \cos x + \\ &\quad + \int \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

Такъ какъ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + \\ &\quad + \int dx - \int \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Откуда: } 2 \int \cos^2 x \, dx &= \sin x \cos x + \int dx \\ \text{или } \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C. \end{aligned}$$

$$5) \text{ Найти } \int x e^x \, dx.$$

Положимъ $x = u$, $e^x \, dx = dv$; тогда $du = dx$ и $v = e^x$; слѣд.:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

102. Разложение на слагаемыя. Иногда бываетъ возможно преобразовать подынтегральную функцию въ алгебраическую сумму нѣсколькихъ такихъ функций, которая интегрировать мы умѣемъ.

$$\text{Примѣры. 1) Найти } \int (2x - \sqrt{x})^2 \, dx.$$

Такъ какъ $(2x - \sqrt{x})^2 = 4x^2 - 4x\sqrt{x} + x$, то

$$\begin{aligned} \int (2x - \sqrt{x})^2 \, dx &= 4 \int x^2 \, dx - 4 \int x^{\frac{3}{2}} \, dx + \int x \, dx = \\ &= 4 \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = \frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + C. \end{aligned}$$

$$2) \text{ Найти } \int \frac{xdx}{(x-1)^2}. \text{ Замѣтивъ, что } \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}, \text{ находимъ:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x-1)^2} &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \\ &= \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int (x-1)^{-2} d(x-1) \\ &= \log(x-1) - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

3) Найти $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$. Не трудно убедиться, что

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

Поэтому: $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right) =$

$$= \frac{1}{2a} \left[\log(x-a) - \log(x+a) \right] + C = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C.$$

4) Найти $\int \cos^2 x \, dx$. Изъ тригонометрии известно,

что

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Подставивъ, находимъ:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x \, d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Нѣкоторыя геометрическія примѣненія интегрального исчисления.

I. Вычисленіе площадей. ограниченныхъ кривыми.

103. Общий пріемъ. Если кривая AB (черт 32) аналитически выражена уравненіемъ $y=f(x)$, то, какъ мы видѣли (\S 90), площадь $ADEF$, ограниченная двумя ординатами, частью кривой и отрѣзкомъ оси x -овъ, выражается слѣдующимъ опредѣленнымъ интеграломъ (если $OC=x_0$ и $OF=x'$):

$$\text{площ. } CDEF = \int_{x_0}^{x'} f(x) \, dx$$

Величину этого интеграла мы найдемъ (\S 94), если предварительно отыщемъ одну изъ первообразныхъ функций, производная которой равна $f(x)$; другими словами, если найдемъ какое-либо значение неопределеннаго интеграла

$$\int f(x) \, dx$$

Такимъ образомъ, вопросъ о вычисленіи площади решается помошью интегрированія функций.

Примѣнимъ этотъ пріемъ къ нахожденію площадей, ограниченныхъ дугами: 1) параболы, 2) эллипса и 3) гиперболы.

104. Парабола. Уравненіе параболы, у которой ось совпадаетъ съ осью x -овъ и вершина находится въ началѣ координатъ (черт. 35), есть:

$$y^2 = 2px; \text{ оттуда } y = \pm \sqrt{2px}$$

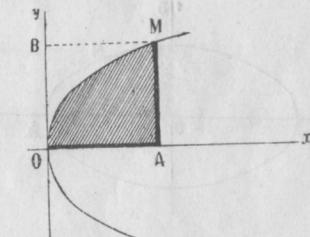
Опредѣлимъ площадь OMA , ограниченную дугою OM , ординатою $MA=y_1$ и абсциссою $OA=x_1$. Такъ какъ для дуги OM ординаты всѣхъ точекъ положительны, то изъ двухъ знаковъ въ формулы, опредѣляющей y , мы возьмемъ только знакъ $+$; тогда искаемая площадь выразится такъ:

$$\text{площ. } OMA = \int_0^{x_1} \sqrt{2px} \, dx \quad [1]$$

Соответствующій неопределенный интеграль находитъся весьма просто:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2px} \, dx &= \sqrt{2p} \int \sqrt{x} \, dx = \sqrt{2p} \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \sqrt{2p} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \sqrt{2px} \end{aligned} \quad [2]$$

(произвольного постоянного числа мы здѣсь не прибавляли, такъ какъ для вычисленія опредѣленного интеграла достаточно найти какую либо одну первообразную функцию).



Черт. 35.

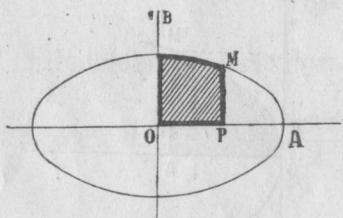
Чтобы получить теперь величину определенного интеграла [1], надо въ выражение соответствующаго неопределенного интеграла [2] подставить верхнюю границу, потомъ нижнюю границу определенного интеграла, и изъ результата первой подстановки вычесть результатъ второй. Послѣдній результатъ (при $x=0$) есть O ; поэтому:

$$\text{площ. } OMA = \frac{2}{3} x_1 \sqrt{2px_1} = \frac{2}{3} x_1 y_1$$

Искомая площадь оказывается такимъ образомъ равной двумъ третямъ площади прямоугольника $OAMB$.

105. Эллипсъ. Уравненіе эллипса, отнесенаго къ своимъ осямъ (черт. 36), есть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \text{ оттуда } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Черт. 36.

Опредѣлимъ площадь $OPMB$, ограниченную дугою BM_1 ординатою $MP=y_1$, абсциссою $OP=x_1$ и отрѣзкомъ OB оси y —овъ. Для этой площади мы должны изъ двухъ знаковъ въ выраженіи для y взять только $+$. Тогда:

$$\text{площ. } OPMB = \int_0^{x_1} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_0^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad [1]$$

Для нахожденія соответствующаго неопределенного интеграла примѣнимъ интегрированіе по частямъ. Пусть

$$\sqrt{a^2 - x^2} = u \text{ и } dx = dv;$$

$$\text{тогда } du = \frac{-2x dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ и } v = x$$

По формулѣ интегрированія по частямъ (§ 101) находимъ:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad [2]$$

Интеграль, стоящій въ правой части, можетъ быть преобразованъ такъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{(a^2 - x^2 - a^2) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= \int \left(\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx = \\ &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Поэтому равенство [2] можетъ быть переписано такъ:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\text{Откуда: } 2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Послѣдній интеграль былъ нами найденъ ранѣе (§ 100, прим. 9-й). Онъ равенъ

$$\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\text{Значитъ: } 2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

(произвольное постоянное число мы опускаемъ)

$$\text{Слѣд.: } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} \right)$$

При $x=0$ это выражение обращается въ O ; поэтому равенство [1] даетъ:

$$\text{площ. } OPMB = \frac{b}{a} \int_0^{x_1} \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

$$= \frac{b}{2a} \left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \arcsin \frac{x_1}{a} \right)$$

Полагая $x_1 = OA = a$, мы изъ этой формулы найдемъ площадь четверти OAB эллипса, а умноживъ результатъ на 4, получимъ площадь всего эллипса:

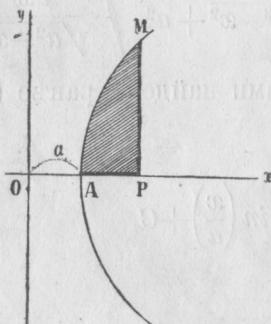
$$\begin{aligned} \text{Площадь эллипса} &= \frac{4b}{2a} \left(a \sqrt{a^2 - a^2} + a^2 \arcsin \frac{a}{a} \right) \\ &= 2ab \arcsin 1 = 2ab \frac{\pi}{2} = \pi ab \end{aligned}$$

При $a = b = r$ получимъ:

$$\text{площадь круга} = \pi r^2$$

106. Гипербола. Уравнение гиперболы, которой действительная ось совпадаетъ съ осью x -овъ, а мнимая съ осью y -овъ (черт. 37), есть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \text{ оттуда: } y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$



Черт. 37.

$$\text{площ. } AMP = \int_a^{x_1} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{b}{a} \int_a^{x_1} \sqrt{x^2 - a^2} dx \quad [1]$$

Чтобы найти соответствующий неопределенный интегралъ, примѣнимъ сначала интегрированіе по частямъ, а потомъ введеніе вспомогательной переменной. Пусть

$$\sqrt{x^2 - a^2} = u \text{ и } dx = dv$$

Тогда:

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \text{ и } v = x$$

Формула интегрированія по частямъ даетъ:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = x \sqrt{x^2 - a^2} - \\ &- \int \frac{(x^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - \\ &- a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Откуда:

$$2 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad [2]$$

Чтобы найти интеграль, стоящий въ правой части этого равенства, введемъ вспомогательную переменную u , связанную съ x уравненіемъ:

$$u = x + \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Отсюда послѣдовательно находимъ:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= u - x, \quad x^2 - a^2 = u^2 - 2ux + x^2 \\ x &= \frac{u^2 + a^2}{2u}, \quad dx = \frac{4u^2 - (u^2 + a^2)2}{4u^2} du = \frac{u^2 - a^2}{2u^2} du \\ \sqrt{x^2 - a^2} &= u - \frac{u^2 + a^2}{2u} = \frac{2u^2 - u^2 - a^2}{2u} = \frac{u^2 - a^2}{2u} \end{aligned}$$

Подставивъ, находимъ:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \left(\frac{u^2 - a^2}{2u^2} du : \frac{u^2 - a^2}{2u} \right) = \int \frac{du}{u} = \log u = \\ &= \log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \end{aligned}$$

(произвольное постоянное число мы опускаемъ).

Теперь уравненіе [2] даетъ:

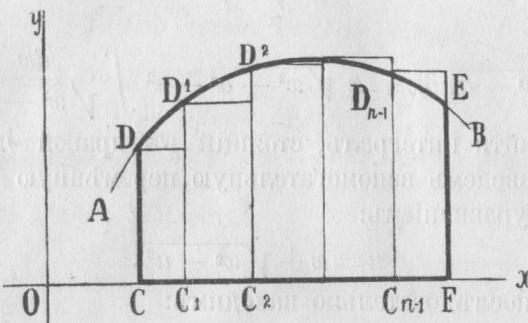
$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$$

и изъ уравненія [1] находимъ:

$$\begin{aligned} \text{площ. } AMP &= \frac{b}{2a} \left[x_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} - a^2 \log(x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}) + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \log a \right] = \frac{b}{2a} x_1 \sqrt{x_1^2 - a^2} - \frac{ab}{2} \log \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a} \end{aligned}$$

II. Вычисление объемов тѣлъ вращенія.

107. Общий пріемъ. Пусть непрерывная функция $y=f(x)$ выражаетъ въ прямоугольныхъ координатахъ кривую AB (черт. 38), расположеннную въ углѣ xOy . Предположимъ,



Черт. 38.

что плоскость этого угла вращается кругомъ прямой Ox , какъ оси. Тогда кривая AB порождаетъ нѣкоторое тѣло вращенія. Опредѣлимъ объемъ V части этого тѣла, заключенной между 2-мя параллельными плоскостями, перпендикулярными къ оси x -овъ и пересѣкающими эту ось въ точкахъ C и F и кривую въ точкахъ D и E . Объемъ этотъ мы опредѣлимъ пріемомъ, вполнѣ аналогичнымъ тому, которымъ мы прежде (\S 90) опредѣляли площадь фигуры $CDEF$.

Разобъемъ объемъ V на произвольное число n слоевъ, провѣдя черезъ $n-1$ точекъ: C_1, C_2, \dots, C_{n-1} , взятыхъ на оси x -овъ между точками C и F , плоскости, перпендикулярныя къ этой оси (нѣть надобности, чтобы эти плоскости были равноотстоящими другъ отъ друга).

Обозначимъ объемы этихъ слоевъ, начиная слѣва, черезъ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$. Тогда

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$$

Проведемъ прямые, параллельныя оси x -овъ; черезъ точку D до пересѣченія съ ординатой $C_1 D_1$, черезъ точку D_1 до пересѣченія съ ординатой $C_2 D_2$ и т. д.; мы получимъ тогда n прямоугольниковъ (изъ которыхъ нѣкоторые могутъ выступать за предѣлы контура площади $CDEF$). При вращеніи фигуры вокругъ оси x -овъ эти прямоугольники произведутъ n цилиндровъ. Пусть объемы ихъ будутъ (слѣва направо):

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n.$$

Докажемъ, что если число n неограниченно увеличивается, при чмъ толщина каждого слоя стремится къ 0, то сумма $w_1 + w_2 + \dots + w_n$ стремится къ предѣлу, равному V . Для этого предварительно убѣдимся, что каждое изъ отношеній:

$$\frac{v_1}{w_1}, \frac{v_2}{w_2}, \frac{v_3}{w_3}, \dots, \frac{v_n}{w_n} [1]$$

стремится при этомъ къ 1. Возьмемъ какое-нибудь одно изъ этихъ отношеній, напр. $\frac{v_2}{w_2}$. Объемъ v_2 , очевидно, заключается между объемами двухъ цилиндровъ, имѣющихъ высоту (толщину), общую съ объемомъ v_2 , именно $C_1 C_2$, а радиусами основаній: одинъ наибольшую изъ всѣхъ ординат дуги $D_1 D_2$, другой наименьшую изъ этихъ ординатъ. Обозначимъ первую черезъ L , вторую черезъ l . Тогда можемъ написать:

$$\pi L^2 \cdot C_1 C_2 > v_2 > \pi l^2 \cdot C_1 C_2$$

Раздѣлимъ всѣ члены неравенства на объемъ w_2 , равный $\pi C_1 D_1^2 \cdot C_1 C_2$:

$$\frac{L^2}{C_1 D_1^2} > \frac{v_2}{w_2} > \frac{l^2}{C_1 D_1^2}$$

Когда толщина каждого слоя стремится къ 0, ординаты L и l стремятся къ совпаденію съ ординатой $C_1 D_1$; поэтому крайнія дроби послѣдняго неравенства стремятся къ 1, слѣд. и пред. $\frac{v_2}{w_2} = 1$. То же самое можно сказать о любомъ отношеніи изъ ряда [1].

Теперь мы видимъ, что числа:

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$$

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$$

удовлетворяютъ условіямъ теоремы § 17-го. Поэтому

$$\text{пред. } \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n} = 1.$$

$$\text{Но } v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = V; \text{ слѣд.}$$

$$\text{пред. } (w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n) = V.$$

Обозначимъ теперь

$$OC=x_0, OC_1=x_1, OC_2=x_2, \dots, OC_{n-1}=x_{n-1}, OF=x'$$

$$CD=f(x_0), C_1D_1=f(x_1), \dots, C_{n-1}D_{n-1}=f(x_{n-1}), EF=f(x').$$

$$CC_1=\Delta x_0, C_1C_2=\Delta x_1, C_2C_3=\Delta x_2, \dots, C_{n-1}F=\Delta x_{n-1}.$$

Тогда можемъ написать:

$$w_1=\pi[f(x_0)]^2\Delta x_0, w_2=\pi[f(x_1)]^2\Delta x_1, \dots, w_n=\pi[f(x_{n-1})]^2\Delta x_{n-1}.$$

$$\text{Слѣд. } V=\text{пред. } \left\{ \pi[f(x_0)]^2\Delta x_0 + \dots + \pi[f(x_{n-1})]^2\Delta x_{n-1} \right\}$$

$$\text{или короче: } V=\text{пред. } \Sigma \pi[f(x)]^2\Delta x=\pi \text{ пред. } \Sigma [f(x)]^2\Delta x$$

т.-е. объемъ V равенъ произведенію числа π на предѣль суммы слагаемыхъ вида $[f(x)]^2\Delta x$, когда число этихъ слагаемыхъ безпредѣльно увеличивается, а каждое слагаемое стремится къ 0, при чмъ аргументу x даются значения, начиная отъ x_0 и кончая x' .

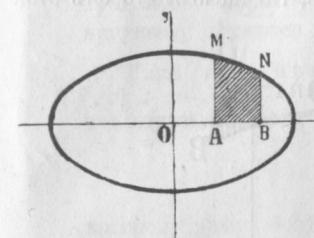
Этотъ предѣль представляетъ собою ни что иное, какъ

$$\text{определенный интеграль } \int_{x_0}^{x'} [f(x)]^2 dx. \text{ Слѣд.}$$

$$V=\pi \int_{x_0}^{x'} [f(x)]^2 dx$$

Примѣнимъ этотъ результатъ къ нахожденію объема эллипсоида вращенія (и, слѣд., и шара).

108. Объемъ эллипсоида вращенія и шара. Тѣло, порождаемое вращеніемъ эллипса вокругъ его большой оси, наз. эллипсоидомъ вращенія. Опредѣлимъ объемъ V , получающійся отъ вращенія части эллипса $AMNB$ (черт. 39) вокругъ оси x -овъ. Такъ какъ для эллипса



Черт. 39.

$$y=f(x)=\pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2-x^2},$$

то искомый объемъ равенъ (если $OA=x_0$ и $OB=x_1$):

$$V=\pi \int_{x_0}^{x_1} [f(x)]^2 dx=\pi \int_{x_0}^{x_1} \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) dx=\frac{\pi b^2}{a^2} \int_{x_0}^{x_1} (a^2-x^2) dx$$

$$\text{Но } \int (a^2-x^2) dx=\int a^2 dx - \int x^2 dx=a^2 x - \frac{x^3}{3} \text{ (постоянное число опускаемъ).}$$

$$\text{Поэтому } V=\frac{\pi b^2}{a^2} \left[\left(a^2 x_1 - \frac{1}{3} x_1^3 \right) - \left(a^2 x_0 - \frac{1}{3} x_0^3 \right) \right] \quad [1]$$

Чтобы получить изъ этой формулы объемъ цѣлаго эллипсоида, достаточно положить въ ней $x_0=0$, $x_1=a$ и результатъ удвоить; сдѣлавъ это получимъ

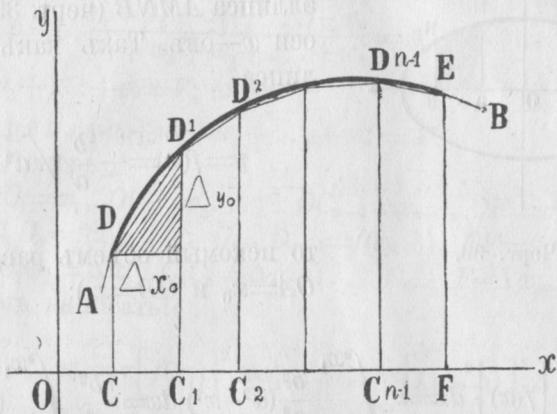
$$\text{Объемъ эллипсоида } = \frac{2\pi b^2}{a^2} \left[a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right] = \frac{2\pi b^2}{a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{4}{3} \pi ab^2 \quad [2]$$

При $a=b=r$ формула [1] даетъ объемъ сферического слоя, а формула [2]—объемъ шара:

$$\text{Объемъ шара } = \frac{4}{3} \pi r^3$$

III. Понятие о вычислении длины кривой.

109. Общий прием. Впишемъ въ данную дугу DE кривой AB (черт. 40) ломаную линію $DD_1D_2\dots D_{n-1}E$ и вообразимъ, что число n сторонъ этой



Черт. 40.

ломаной неограниченно возрастаетъ, при чмъ каждая сторона стремится къ O . Разсуждая совершенно такъ, какъ мы это дѣлали по отношенію къ периметру многоугольника, вписанного въ окружность (§ 19), мы можемъ доказать, что периметръ нашей ломаной, при указанномъ возрастаніи числа ея сторонъ, стремится къ предѣлу, единственному для данной дуги DE . Предѣль эту принимается за длину этой дуги. Обозначимъ его чрезъ l .

Пусть кривая AB задана уравненіемъ:

$$y = f(x)$$

Тогда длину l кривой можно вычислить помошью опредѣленного интеграла. Дадимъ обѣ этомъ общее понятіе. Пусть:

$$OC = x_0, OC_1 = x_1, OC_2 = x_2, \dots, OC_{n-1} = x_{n-1}, OF = x_n$$

$$CC_1 = \Delta x_0, C_1C_2 = \Delta x_1, \dots, C_{n-1}F = \Delta x_{n-1}$$

$$CD = y_0, C_1D_1 = y_1, \dots, C_{n-1}D_{n-1} = y_{n-1}, EF = y_n$$

Возьмемъ какую-нибудь одну изъ сторонъ ломаной линіи, напримѣръ, сторону DD_1 . Изъ чертежа видно, что длина этой стороны, какъ гипотенузы прямоугольного тр-ка, равна:

$$DD_1 = \sqrt{(\Delta x_0)^2 + (\Delta y_0)^2}$$

гдѣ черезъ Δy_0 обозначена разность $D_1C_1 - DC$, равная $y_1 - y_0$. Подобно этому:

$$D_1D_2 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2}, \quad D_2D_3 = \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta y_2)^2} \text{ и т. д.}$$

Периметръ ломаной есть сумма всѣхъ этихъ сторонъ и потому:

$$l = \text{пред. } \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \text{пред. } \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

т.-е. искомая длина дуги равна предѣлу, къ которому стремится сумма слагаемыхъ вида $\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$, когда число этихъ слагаемыхъ безпредѣльно возрастаетъ и каждое слагаемое стремится къ 0 , при чмъ аргументу x даются значения, начиная отъ x_0 и кончая x_1 .

Такъ какъ пред. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то можно доказать (мы опускаемъ это доказательство), что предѣль указанной суммы есть интеграль

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

которому даютъ болѣе простой видъ посредствомъ слѣдующаго преобразованія:

$$\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

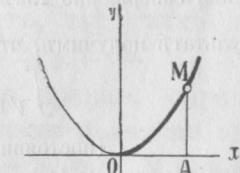
Такимъ образомъ, длина l части кривой, расположенной между ея точками, имѣющими абсциссы x_0 и x_1 , выражается равенствомъ:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

110. Длина дуги параболы. Вычислениѣ интеграловъ, выражающихъ длину кривой, даже для такихъ сравнительно простыхъ кривыхъ, какъ эллипсъ, представляетъ очень большія трудности. Мы ограничимся примѣненіемъ найденной общей формулы къ нахожденію длины кривой, заданной уравненіемъ:

$$x^2 = 2py \text{ или } y = \frac{x^2}{2p}$$

т.-е. параболы (черт. 41), которой ось совпадаетъ съ осью y -овъ и вершина съ началомъ координатъ. Для этой кривой мы имѣемъ



Черт. 41.

$$\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx$$

и потому длина l дуги OM (если OA обозначимъ x_1) выразится

$$l = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} dx. \dots [1].$$

Для нахожденія соответствующаго неопределеннаго интеграла примѣнимъ интегрированіе по частямъ. Пусть $\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} = u$ и $dx = dv$; тогда

$$du = \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}} \text{ и } v = x.$$

Поэтому:

$$\int \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} dx = x \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} - \int \frac{\frac{x^2}{p^2} dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}} \dots \dots \dots [2].$$

Интеграль, стоящий въ правой части равенства, преобразуется такъ:

$$\int \frac{(1+\frac{x^2}{p^2}-1) dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}} = \int \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}}.$$

Поэтому равенство [2] даетъ:

$$2 \int \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} dx = x \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}} \dots \dots \dots [3].$$

Вопросъ приведенъ такимъ образомъ къ нахожденію интеграла въ правой части послѣдняго равенства. Положивъ въ немъ $x = pz$, получимъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}} = \int \frac{d(pz)}{\sqrt{1+z^2}} = p \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} \dots \dots \dots [4].$$

Послѣдній интеграль можно найти введеніемъ вспомогательной переменной совершенно такъ, какъ прежде (§ 106) мы нашли $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$; въ результатѣ получимъ, что

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \operatorname{Log}(z + \sqrt{1+z^2})$$

(постоянное произвольное число опускаемъ), въ чмъ можно убѣдиться повѣркою:

$$\left[\operatorname{Log}(z + \sqrt{1+z^2}) \right]' = \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}}{z + \sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Теперь равенства [3] и [4] даютъ

$$\int \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + \frac{p}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{x}{p} + \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} \right).$$

При $x=0$ этотъ интеграль обращается въ 0; поэтому искомая длина выразится:

$$l = \int_0^{x_1} \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} dx = \frac{x_1 \sqrt{p^2+x_1^2}}{2p} + \frac{p}{2} \operatorname{Log} \frac{x_1 + \sqrt{p^2+x_1^2}}{p}.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

Свойства производной.

1. Функция $y=x^2-3x$ изображена кривою. Определить уголъ, образованный съ полуосью Ox касательною къ этой кривой, проведеною черезъ точку ея съ абсциссой 2.

$$\text{Отвѣтъ: } \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

2. Определить на кривой, заданной уравненіемъ: $y=(3x+1)(2-x)$, такую точку, чтобы касательная, проведенная къ кривой черезъ эту точку, была параллельна оси x —овъ.

$$\text{Отвѣтъ: } \left(\frac{5}{6}, 4 \frac{1}{12} \right).$$

3. Есть ли на кривой: $y=\frac{2x}{x-2}$ такая точка, въ которой касательная перпендикулярна оси x —овъ?

Отвѣтъ. Такой точки не существуетъ, такъ какъ для координатъ ея получаются значенія: $x=2$, $y=\infty$.

4. Функция $y=2x^4-27x$ изображена кривою; определить, для какихъ значеній абсциссы x касательная къ этой кривой образуетъ тупой и для какихъ — острый уголъ съ полуосью Ox .

Отвѣтъ. При $x < \frac{3}{2}$ уголъ тупой; при $x > \frac{3}{2}$ уголъ острый; при $x = \frac{3}{2}$ онъ равенъ 0.

5. Доказать, что если цѣлый многочленъ $f(x)$ дѣлится на $(x-a)^a$, то его производная дѣлится на $(x-a)^{a-1}$.

Указаніе. Воспользоваться теоремой о производной отъ произведенія.

6. Доказать, что если $f(x) = \kappa(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda$, где κ постоянное число и $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ постоянные цѣлые положительные числа, то

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \dots + \frac{\lambda}{x-l}$$

Указание. Воспользоваться теоремой о производной отъ произведенія.

Найти производные отъ функций:

✓ 7. $y = 3x^2 + 5$ Отвѣтъ... $y' = 6x$

✓ 8. $y = \frac{x^3}{3} - 5x + 2$ $y' = x^2 - 5$

✓ 9. $y = (2+3x)x$ $y' = 2+6x$

✓ 10. $y = (2+3x)(4x-5)$ $y' = 24x-7$

✓ 11. $y = 3(x+1)(2x-1)$ $y' = 3(4x+1)$

✓ 12. $y = x^2(a+x)^3(b-x)^4$

$$y' = x(a+x)^2(b-x)^3 \left[2(a+x)(b-x) + 3x(b-x) - 4x(a+x) \right]$$

✓ 13. $y = (ax^n+b)^4$ $y' = 4an(ax^n+b)^3x^{n-1}$

✓ 14. $y = x^n(1-x)^n$ $y' = nx^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$

✓ 15. $y = \frac{x^2}{x+1}$ $y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

✓ 16. $y = \frac{2x^2-3}{5x}$ $y' = \frac{2x^2+3}{5x^2}$

✓ 17. $y = \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-3}$ $y' = \frac{x^4-9x^2+10x}{(x^2-3)^2}$

✓ 18. $y = \frac{4x^2-5x+3}{x^2-6x+5}$ $y' = \frac{-19x^2+34x-7}{(x^2-6x+5)^2}$

✓ 19. $y = \sqrt[5]{x^7}$ $y' = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$

✓ 20. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

✓ 21. $y = (x+\sqrt{1-x^2})^n$; $y' = n(x+\sqrt{1-x^2})^{n-1} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

✓ 22. $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ $y' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

✓ 23. $y = \sqrt[3]{ax^2+bx+c}$ $y' = \frac{2ax+b}{3\sqrt[3]{(ax^2+bx+c)^2}}$

✓ 24. $y = \sqrt{2ax-x^2}$ $y' = \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$

✓ 25. $y = x\sqrt{1-x^2}$ $y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

✓ 26. $y = \frac{\sqrt{x}}{7x+5}$ $y' = \frac{-7x+5}{(7x+5)^2}$

✓ 27. $y = \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $y' = \frac{a^3}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$

✓ 28. $y = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ $y' = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})^2}$

✓ 29. $y = (x+\sqrt{1+x})^2$ $y' = \frac{(x+\sqrt{1+x})(1+2\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}}$

✓ 30. $y = \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ $y' = \frac{x}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$

✓ 31. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x^3)^3}}$ $y' = \frac{9x^2}{4(2-x^3)\sqrt[4]{(2-x^3)^3}}$

✓ 32. $y = xe^x$ $y' = e^x(1+x)$

✓ 33. $y = e^x(x-1)$ $y' = xe^x$

✓ 34. $y = e^x(1-x^2)$ $y' = e^x(1-2x-x^2)$

✓ 35. $y = \frac{e^x}{x}$ $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

✓ 36. $y = e^x x^n$ $y' = e^x x^{n-1}(x+n)$

✓ 37. $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

✓ 38. $y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $y' = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

✓ 39. $y = x \log x$ $y' = 1 + \log x$

✓ 40. $y = e^x \log x$ $y' = e^x \left(\log x + \frac{1}{x} \right)$

✓ 41. $y = x^n \log x$ $y' = x^{n-1}(n \log x + 1)$

42. $y = \frac{\log x}{x}$ $y' = \frac{1 - \log x}{x^2}$
43. $y = \sqrt{x} \log x$ $y' = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$
44. $y = \log(a + b x^2)$ $y' = \frac{2bx}{a + bx^2}$
45. $y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
46. $y = \log \frac{1-x}{1+x}$ $y' = -\frac{2}{1-x^2}$
47. $y = a^{mx}$ $y' = ma^{mx} \log a$
48. $y = x(\log x - 1)$ $y' = \log x$
49. $y = \log \frac{1}{x}$ $y' = -\frac{1}{x}$
50. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 \sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{2}} x^{-2} x^{-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{11}{6}}$; $y' = -\frac{11}{6x^2 \sqrt[6]{x^5}}$
51. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2 \sqrt{x}}{m}}$ $y' = \frac{5}{6\sqrt[3]{m}} \cdot x^{-\frac{1}{6}}$
52. $y = x \sqrt{x} \sqrt[3]{x}$ $y' = \frac{7}{4} \sqrt{x^3}$
53. $y = \sin(2x - 1)$ $y' = 2\cos(2x - 1)$
54. $y = \sin(x^n)$ $y' = nx^{n-1} \cos(x^n)$
55. $y = \cos(a - bx^2)$ $y' = 2bx \sin(a - bx^2)$
56. $y = x^n \sin x$ $y' = x^{n-1} (n \sin x + x \cos x)$
57. $y = \frac{1}{\sin x}$ $y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
58. $y = \frac{1}{\cos x}$ $y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
59. $y = \frac{\sin x}{x^2}$ $y' = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$
60. $y = \cos 2x - 3 \sin x$ $y' = -2 \sin 2x - 3 \cos x$
61. $y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ $y' = 3 \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$
62. $y = \sin x \cos x$ $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$
63. $y = 4 \sin x \cos x - \cos 5x$; $y' = 4\cos^2 x - 4\sin^2 x + 5\sin 5x$
64. $y = (\sin x)^p (\cos x)^q$; $y' = (\sin x)^{p-1} (\cos x)^{q-1} (p \cos^2 x - q \sin^2 x)$
65. $y = x^m \sin px$ $y' = x^{m-1} (m \sin px + px \cos px)$

66. $y = (\sin x)^2 + 2\cos x$ $y' = 2\sin x (\cos x - 1)$
67. $y = \frac{2 - 3 \cos x}{5 - \sin x}$ $y' = \frac{15\sin x + 2\cos x - 3}{(5 - \sin x)^2}$
68. $y = \operatorname{tg}(ax)$ $y' = \frac{a}{\cos^2(ax)}$
69. $y = (\cos 2x) \sqrt{\log x}$; $y' = -2(\sin 2x) \sqrt{\log x} + \frac{\cos 2x}{2x \sqrt{\log x}}$
70. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ $y' = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$
71. $y = \sin x - x \cos x$ $y' = x \sin x$
72. $y = \log(\sin x)$ $y' = \cot g x$
73. $y = \log(\cos \sqrt{\frac{1}{x}})$ $y' = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\frac{1}{x}}}{2x \sqrt{x}}$
74. $y = \log \left(\cos \frac{x}{2} \right)^2$ $y' = -\operatorname{tg} \frac{x}{2}$
75. $y = \log[(\operatorname{tg} x)(\cos x)]$ $y' = \cot g x$
76. $y = \log(e^x + e^{-x})$ $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
77. $y = \arcsin(ax)$ $y' = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 x^2}}$
78. $y = \arcsin \frac{1}{x}$ $y' = \frac{-1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$
79. $y = x \operatorname{arc tg} x$ $y' = \operatorname{arc tg} x + \frac{x}{1 + x^2}$
80. $y = \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$; $y' = -\frac{1}{2}$
81. $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ $y' = \arcsin x$
82. $y = \sin(\sin x)$ $y' = \cos(\sin x) \cos x$
83. $y = \cos(\cos x)$ $y' = \sin(\cos x) \sin x$
84. $y = \arcsin(2x \sqrt{1 - x^2})$ $y' = \pm \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$
85. $y = x^x$ $y' = x^x (\log + 1)$
86. $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ $y' = \left(\frac{a}{x}\right)^x \left(\operatorname{Log} \frac{a}{x} - 1 \right)$

$$\text{V87. } y = \sqrt[x]{x} \dots \quad y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \left(1 - \log x \right)$$

$$\text{V88. } y = (x)^{e^x} \dots \quad y' = e^x x^{e^x-1} \left(x \log x + 1 \right)$$

$$\text{+ 89. } y = x^{\arcsin x} \dots \quad y' = x^{\arcsin x-1} \left(\frac{x \log x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \right)$$

$$\text{+ 90. } y = (\sin x)^x \dots \quad y' = (\sin x)^x \left[\log(\sin x) + x \cot x \right]$$

Найти наибольшія и наименішія значенія функцій:

$$\text{91. } y = x^3 - 2x^2 + x + 1 \text{ [въ області } (-2, +2)].$$

Отвѣтъ. Maximum при $x = \frac{1}{3}$, minimum при $x = 1$. Наибільше значеніе при $x = 2$, наименьше при $x = -2$.

$$\text{+ 92. } y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 \text{ [въ області } (-\infty, +\infty)].$$

Отвѣтъ. Max. при $x = 1$, min. при $x = 2$. Наибольшаго и наименьшаго значеній нѣть.

$$\text{+ 93. } y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ [въ області } (-a, +a), \text{ при } a \text{ и } b \text{ положительныхъ].}$$

Отвѣтъ. Maximum равенъ b при $x = 0$. Два крайнихъ значенія; равныя 0, при $x = \pm a$. Наибольшее значеніе b , наименьшее 0.

$$\text{+ 94. } y = \frac{x}{x^2 + 1}. \text{ Отвѣтъ. Наим. зн. при } x = -1, \text{ наиб. при } x = +1.$$

$$\text{+ 95. } y = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 5}. \text{ Отвѣтъ. Наиб. (maxim.) значеніе при } x = 3, \text{ наименш. (minim.) значеніе при } x = 1 \text{ (при } x = \pm \infty y = 0).$$

$$\text{+ 96. } y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 1}. \text{ Отвѣтъ. Наименш. (min.) при } x = 1 + \sqrt{2}, \text{ наиб. (max.) при } x = 1 - \sqrt{2} \text{ (при } x = \pm \infty y = 1).$$

$$\text{X97. } y = \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 3x + 3}. \text{ Отвѣтъ. Max. (наиб.) при } x = 3, \text{ min. (наим.) при } x = 1 \text{ (при } x = \pm \infty y = 1).$$

$$\text{98. } y = \frac{x^2 + 6x - 6}{2x - 2}. \text{ Отвѣтъ. Min. при } x = 2 + \sqrt{10},$$

max. при $x = 2 - \sqrt{10}$. При $x = 1$ функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, переходя отъ $-\infty$ къ $+\infty$. Наиб. и наим. значеній нѣть. При $x = \pm \infty y = \pm \infty$.

$$\text{99. } y = x + \sqrt{1 - x} \text{ [въ області } (-\infty, +1)].$$

Отвѣтъ. Maximum (наиб.) равенъ $\frac{5}{4}$ при $x = \frac{3}{4}$. Крайнєе значеніе при $x = 1$. При $x = -\infty y = -\infty$.

$$\text{100. } y = xe^{\frac{1}{x}} \text{ [въ області } (0, +\infty).$$

Отвѣтъ. Min. (наим.) равенъ e при $x = 1$.

$$\text{101. } y = e^x \cos x. \text{ Отвѣтъ. Max. (наиб.) при } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \text{ min. (наим.) при } x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi.$$

102. Найти трехчленъ второй степени, обращающійся въ 0 при $x = a$ и при $x = b$ и имѣющій число κ maximum или minimum.

$$\text{Отвѣтъ. } y = -\frac{4\kappa}{(a-b)^2} [x^2 - (a+b)x + ab].$$

$$\text{103. } y = \frac{a^x}{x}. \text{ Отвѣтъ. Min. при } x = \frac{1}{\log a}; \text{ при } x = 0 \text{ функція претерпѣваетъ разрывъ непрерывности отъ } -\infty \text{ къ } +\infty.$$

$$\text{104. } y = x\sqrt{2 - x^2} \text{ [въ області } (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})].$$

Отвѣтъ. Min. (наим.) при $x = -1$, max. (наиб.) при $x = +1$; 2 крайнихъ значенія, равныя 0, при $x = \pm \sqrt{2}$.

$$\text{105. } y = \frac{x}{\log x}. \text{ Отвѣтъ. Такъ какъ отрицательные числа не имѣютъ логарифмовъ, то данная функція существуетъ только въ області } (0, +\infty), \text{ при чёмъ при } x = 1 \text{ она претерпѣваетъ разрывъ непрерывности отъ } -\infty \text{ къ } +\infty. \text{ Minimum равенъ } e \text{ при } x = e. \text{ Наиб. и наим. значенія нѣть.}$$

106. $y = \sin x \cdot \sin(a+x)$. Отвѣтъ. Min. (наим.) равенъ $-\sin^2 \frac{a}{2}$ при $x = \frac{2k\pi - a}{2}$; max. (наиб.) равенъ $\cos^2 \frac{a}{2}$ при $x = \frac{(2k+1)\pi - a}{2}$.

107. $y = x^x$ (при $x > 0$). Отвѣтъ. Min. (наим.) при $x = e^{-1}$.

108. $y = \frac{x^2}{e^x}$. Отвѣтъ. Max. при $x = 2$, min. (наим.) при $x = 0$; наиб. значенія нѣть, такъ какъ при $x = -\infty$ $y = +\infty$.

109. $y = 2x + 3\sqrt[3]{(a-x)^2}$. Отвѣтъ. Max. при $x = a-1$; min. при $x = a$. Наиб. и наименьш. значеній нѣть.

Замѣчаніе. Въ этомъ примѣрѣ при переходѣ x черезъ a производная мѣняетъ знакъ $-$ на $+$, претерпѣвая разрывъ непрерывности отъ $-\infty$ къ $+\infty$.

110. $y = \sin x \cdot (1 + \cos x)$. Отвѣтъ. Max. (наиб.) при $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; min. (наим.) при $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

111. $y = x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ ($a > 0$). Отвѣтъ. Функция существуетъ только въ области $(-a, +a)$. Min. (наим.) при $x = -\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$; крайнія значенія: $y = 0$ при $x = -a$ и $y = +\infty$ при $x = a$.

112. $y = \frac{e^x}{\sin x}$. Отвѣтъ. Min. при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; max. при $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$. Наиб. и наим. значеній нѣть (при $x = k\pi$ функция претерпѣваетъ разрывъ непрерывности, обращаясь въ $\pm\infty$).

113. Данъ прямоугольникъ $ABCD$; его стороны AB и AD продолжены за точки B и D . Найти на продолженіи первой точку B_1 и на продолженіи второй точку C_1 , чтобы прямая

$B_1 C_1$ проходила черезъ вершину C и опредѣляла $\triangle A B_1 D_1$ съ наименьшою площадью.

Отвѣтъ. $B B_1 = B A$.

114. Данъ кусокъ картона, имѣющій форму квадрата со стороной a . Изъ каждого угла его вырѣзываютъ квадратикъ со стороной x для того, чтобы, загнувъ края оставшейся фигуры, склеить коробку. Определить x при условіи, чтобы вмѣстимость коробки была наибольшая. $\sqrt{(a-2x)^2 \cdot x} : \sqrt{(a-2x)^2 + (a-2x)x} =$

Отвѣтъ. $x = \frac{a}{6}$.

115. Въ шаръ радиуса r вписанъ цилиндръ. Определить радиусъ x основанія этого цилиндра, при которомъ его объемъ есть наибольшій.

Отвѣтъ. $x = r \sqrt{\frac{2}{3}}$.

116. Определить конусъ, который при постоянномъ объемѣ v имѣлъ бы наименьшую боковую поверхность.

Отвѣтъ. Радиусъ основанія конуса $= \sqrt{\frac{9v^2}{2\pi^2}}$.

117. Определить прямоугольный трѣкъ, который при данной гипотенузѣ a имѣлъ бы наибольшую площадь.

Отвѣтъ. Равнобедренный трѣкъ.

118. Определить прямоугольный трѣкъ, который при данной гипотенузѣ a имѣлъ бы наибольшую сумму катетовъ.

Отвѣтъ. Равнобедренный трѣкъ.

119. На горизонтальной площади стоять памятникъ, представляющій собою фигуру человѣка, поставленную на пьедесталѣ. На какомъ разстояніи x отъ основанія пьедестала фигура видна подъ наибольшимъ угломъ зрењія, если высота пьедестала есть H , а высота фигуры h .

Указаніе. Надо выразить въ зависимости отъ x тангенсъ угла зрењія и затѣмъ отыскать наиб. значение получившагося выраженія.

Отвѣтъ. $x = \sqrt{(H+h)H}$.

120. Нормандское окно имѣть форму прямоугольника, завершенного полукругомъ. Найти высоту и ширину такого

окна при условіі, чтобы периметръ этой фигуры равнялся данной величинѣ p , а количество свѣта, пропускаемаго окномъ, было наибольшее.

Отвѣтъ. Высота прямоугольника равна радиусу полуокруга.

121. Изо всѣхъ прямоугольниковъ, вписанныхъ въ данный кругъ, какой имѣеть наибольшую площадь?

Отвѣтъ. Квадратъ.

122. Въ данный трапециевъ вписать прямокутъ съ наибольшою площадью такъ, чтобы основаніе прямокута лежало на основаніи трапеци, а вершины двухъ угловъ лежали на боковыхъ сторонахъ трапеци.

Отвѣтъ. Высота прямокута $= \frac{1}{2}$ высоты трапеци.

123. Изо всѣхъ трапециевъ съ даннымъ периметромъ $2p$ и даннымъ основаніемъ a какой имѣеть наибольшую площадь?

Отвѣтъ. Равнобедренный.

124. Найти наибольшее значеніе произведенія xy при условіі $5x+7y=20$.

Отвѣтъ. $x=2, y=\frac{10}{7}$.

125. Данная конечная прямая AB раздѣлена въ точкѣ C на два отрѣзка AC и CB , на которыхъ построены равносторонніе трапеци. Опредѣлить положеніе точки C при условіі, чтобы сумма объемовъ двухъ тѣлъ, полученныхъ вращеніемъ этихъ трапециевъ вокругъ AB , была наименьшая.

Отвѣтъ. Сдѣлить AB пополамъ.

126. Дана высота h вертикального столба, поставленного на горизонтальной площади. На какую высоту x надъ площадью надо подняться, на разстояніи a отъ этого столба, чтобы видѣть столбъ подъ наибольшимъ угломъ зрењія?

Указаніе. Опустивъ изъ вершины угла зрењія перпендикуляръ на направленіе столба, мы раздѣлимъ этотъ уголъ на 2 части α и β . Опредѣливъ $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ черезъ a, h и x , составимъ выраженіе для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и найдемъ его maximum.

Отвѣтъ. $x=\frac{1}{2}h$.

N 127. Нѣкто, будучи въ лодкѣ въ 3 миляхъ отъ ближайшей точки берега, желаетъ въ кратчайшее время достигнуть мѣста, находящагося въ 5 миляхъ отъ этой точки, считая вдоль берега; опредѣлить мѣсто, къ которому онъ долженъ пристать, если известно, что онъ можетъ проходить по 5 миль въ часъ, а проплыть только по 4.

Указаніе. Пусть x есть разстояніе мѣста, къ которому надо пристать, отъ точки берега, ближайшей къ лодкѣ, и y разстояніе этого мѣста отъ лодки. Вопросъ приводится къ нахожденію наименьшаго значенія суммы $\frac{y}{4} + \frac{5-x}{5}$, где

$$y = \sqrt{3^2+x^2}.$$

Отвѣтъ. $x=4$.

128. Два желѣзнодорожные пути сходятся въ городѣ подъ угломъ 60° . Со станціи, находящейся на первомъ пути въ разстояніи 32 верстъ отъ города, вышелъ по направленію къ нему поѣздъ A . Въ то же время со станціи, находящейся на второмъ пути на разстояніи 50 верстъ отъ города, вышелъ другой поѣздъ B по направленію къ тому же городу, со скоростью вдвое большей скорости первого поѣзда. Найти, гдѣ будетъ поѣздъ B во время наименьшаго разстоянія между нимъ и поѣздомъ A и опредѣлить это разстояніе.

Указаніе. Примемъ за неизвѣстное время t , протекшее отъ выхода поѣзда B со станціи до момента, когда разстояніе между поѣздами есть наименьшее; пусть v есть скорость движенія поѣзда A ; тогда $2v$ есть скорость движенія поѣзда B .

Разстояніе между поѣздами есть сторона такого трапециевъ, у котораго противолежащей уголь равенъ 60° , а двѣ другія стороны суть $50-2vt$ и $32-vt$. Составивъ формулу, опредѣляющую длину стороны трапециевъ по даннымъ двумъ другимъ сторонамъ и углу между ними, найдемъ затѣмъ наименьшее значеніе получившагося выраженія.

Отвѣтъ. Въ самомъ городѣ; наименьшее разстояніе равно 7 верстъ.

129. Даны n гальваническихъ элементовъ; электродвижущаяся сила каждого равна k , внутреннее сопротивленіе r .

Какъ слѣдуетъ соединить эти элементы, чтобы получить наивыгоднѣйшее дѣйствие тока, если внѣшнее сопротивленіе равно h ?

Рѣшеніе. Предположимъ, что всѣ элементы соединены въ x группъ, по $\frac{n}{x}$ элементовъ въ каждой группѣ, и пусть въ каждой группѣ элементы соединены параллельно, а группы между собою послѣдовательно. Зная, что при параллельномъ соединеніи электродвижущая сила не измѣняется, а внутреннее сопротивленіе уменьшается пропорціонально числу элементовъ, мы найдемъ, что въ каждой группѣ электродвижущая сила будетъ равна k , а внутреннее сопротивленіе r : $\frac{n}{x}$, т.-е. $\frac{rx}{n}$. Далѣе, принявъ во вниманіе, что при послѣдовательномъ соединеніи электродвижущая сила и внутреннее сопротивленіе возрастаютъ пропорціонально числу элементовъ, мы найдемъ, что въ цѣпи электродвижущая сила будетъ kx , а внутреннее сопротивленіе $\frac{rx}{n} \cdot x = \frac{rx^2}{n}$. Согласно формулѣ Ома сила тока выразится:

$$y = \frac{kx}{\frac{rx^2}{n} + h} = \frac{nkx}{rx^2 + nh} = nk \cdot \frac{x}{rx^2 + nh}.$$

Вопросъ приводится къ нахожденію наибольшаго значенія дроби

$$\frac{x}{rx^2 + nh}$$

Найдемъ производную этой дроби:

$$\left(\frac{x}{rx^2 + nh} \right)' = \frac{rx^2 + nh - 2rx^2}{(rx^2 + nh)^2} = \frac{nh - rx^2}{(rx^2 + nh)^2}$$

Эта производная обращается въ 0 при $rx^2 = nh$, т.-е. при $x = +\sqrt{\frac{nh}{r}}$ (знакъ—отброшенъ, такъ какъ число x положительно). По виду производной находимъ, что когда x меньше найденной величины, тогда $rx^2 < nh$ и производная положительна; если же x болѣе этого значенія, то $rx^2 > nh$

и производная отрицательна; слѣд., при $x = \sqrt{\frac{nh}{r}}$ дробь получаетъ maximum, который будетъ также и наибольшимъ значеніемъ.

Найдемъ, чemu равно при этомъ значеніи x внутреннее сопротивленіе батареи:

$$\frac{rx^2}{n} = r \left(\sqrt{\frac{nh}{r}} \right)^2 : n = nh : n = h$$

Мы приходимъ такимъ образомъ къ слѣдующему важному физическому закону: наивыгоднѣйшее дѣйствие батареи оказывается тогда, когда внутреннее сопротивленіе ея равно внѣшнему сопротивленію.

Прослѣдить измѣненіе функцій:

130. $y = \frac{1}{x}$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, 0)$ функція убываетъ отъ 0 до $-\infty$; въ области $(0, +\infty)$ она убываетъ отъ $+\infty$ до 0.

Замѣчаніе. Выраженіе: „въ области $(-\infty, 0)$ функція убываетъ отъ 0 до $-\infty$ “ надо понимать въ томъ смыслѣ, что когда x , оставаясь отрицательнымъ, безпредѣльно увеличивается по абс. величинѣ, тогда функція, оставаясь отрицательной, стремится къ предѣлу 0; когда же x , оставаясь отрицательнымъ, стремится къ 0, функція, оставаясь отрицательной, безпредѣльно увеличивается по абс. величинѣ. Такой же смыслъ имѣютъ и всѣ другія подобныя выраженія, встрѣчающіяся ниже въ отвѣтахъ.

131. $y = \frac{1}{x^2}$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, 0)$ функція возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$; въ области $(0, +\infty)$ она убываетъ отъ $+\infty$ до 0.

132. $y = +\sqrt{x}$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, 0)$ функція не существуетъ; въ области $(0, +\infty)$ она возрастаетъ отъ 0 до $+\infty$.

133. $y = \sqrt[3]{x}$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, +\infty)$ функція возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, переходя черезъ 0 при $x = 0$.

134. $y = \frac{a^x}{x}$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, 0)$ функція убываетъ отъ 0 до $-\infty$; въ области $\left(0, \frac{1}{\log a}\right)$ она убываетъ отъ $+\infty$ до minimum, равнаго $\left(\log a\right)^{\frac{1}{\log a}}$; въ области $\left(\frac{1}{\log a}, +\infty\right)$ функція возрастаетъ отъ minimum до $+\infty$.

135. $y = x + \frac{1}{x} + 2$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, -1)$ функція возрастаетъ отъ $-\infty$ до 0 (maxim.); въ области $(-1, 0)$ она убываетъ отъ 0 до $-\infty$; въ области $(0, +1)$ убываетъ отъ $+\infty$ до 4 (minim.); наконецъ, въ области $(+1, +\infty)$ функція снова возрастаетъ отъ 4 до $+\infty$.

136. $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} \frac{x+3}{x-3}$. Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, -3)$ функція возрастаетъ отъ 1 до $+\infty$; въ обл. $(-3, 0)$ она возрастаетъ отъ $-\infty$ до -1 (maxim.); въ обл. $(0, +1)$ убываетъ отъ -1 до $-\infty$; въ обл. $(+1, +3)$ убываетъ отъ $+1$ до $\frac{1}{2}$ (min.); наконецъ, въ обл. $(+3, +\infty)$ функція возрастаетъ отъ $\frac{1}{2}$ до $+\infty$.

137. $y = \frac{x+1}{x-1}$. Отвѣтъ. Въ обл. $(-\infty, +1)$ функція убываетъ отъ $+1$ до $-\infty$, переходя черезъ 0 при $x = -1$ и черезъ -1 при $x = 0$; въ обл. $(+1, +\infty)$ функція убываетъ отъ $+\infty$ до $+1$.

138. $y = \frac{3x^2 - 5}{x^2 - 1}$. Отвѣтъ. Въ обл. $(-\infty, -1)$ функція убываетъ отъ $+3$ до $-\infty$, переходя черезъ 0 при $x =$

$= -\sqrt{\frac{5}{3}}$; въ обл. $(-1, 0)$ убываетъ отъ $+\infty$ до 5 (min.); въ обл. $(0, +1)$ возрастаетъ отъ 5 до $+\infty$; въ обл. $(+1, +\infty)$ возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+3$, переходя черезъ 0 при $x = +\sqrt{\frac{5}{3}}$.

139. $y = 4x^3 - 3x - m$ (и опредѣлить число вещественныхъ корней уравненія $y = 0$ въ зависимости отъ m).

Отвѣтъ. Въ области $(-\infty, -\frac{1}{2})$ функція возрастаетъ отъ $-\infty$ до $1 - m$ (maximum); въ обл. $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ она убываетъ отъ $1 - m$ до minimum, равнаго $-(1 + m)$; въ обл. $(+\frac{1}{2}, +\infty)$ возрастаетъ отъ $-(1 + m)$ до $+\infty$.

Кривая, изображающая данную функцію, пересѣкаетъ ось x —овъ въ 3-хъ точкахъ (и, слѣд., ур. $y = 0$ имѣть 3 вещественные корня) только тогда, когда числа $1 - m$ и $-(1 + m)$ противоположныхъ знаковъ; для чего необходимо и достаточно, чтобы абс. величина числа m была меньше 1; въ противномъ случаѣ кривая пересѣкаетъ ось x —овъ только въ одной точкѣ (и, слѣд., ур. $y = 0$ имѣть только одинъ вещественный корень).

140. Строить квадратъ со стороною x и на каждой сторонѣ его по равнобедренному треугольнику съ боковою стороныю p (треугольники располагаютъ въ площади квадрата). Прослѣдить измѣненіе площади y восьмиугольника, образовавшагося при этомъ, при измѣненіи x .

Рѣшеніе. Площадь y образовавшагося 8-угольника выражается черезъ x такъ:

$$y = x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} x \sqrt{p^2 - \frac{x^2}{4}} = x^2 + x \sqrt{4p^2 - x^2}$$

Слѣд., x можетъ измѣняться только въ области $(0, 2p)$, при чёмъ внутри этой области y есть функція непрерывная. Производная ея y' равна:

$$y' = 2x + \sqrt{4p^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4p^2 - x^2}} = 2 \cdot \frac{x\sqrt{4p^2 - x^2} + 2p^2 - x^2}{\sqrt{4p^2 - x^2}}$$

Внутри области $(0, 2p)$ эта производная не претерпевает разрыва непрерывности. Приравняем нулю ея числителя и решим получившееся уравнение:

$$\begin{aligned} x\sqrt{4p^2 - x^2} + 2p^2 - x^2 &= 0; \quad x\sqrt{4p^2 - x^2} = x^2 - 2p^2 \\ x^2(4p^2 - x^2) &= x^4 - 4p^2x^2 + 4p^4; \quad 2x^4 - 8p^2x^2 + 4p^4 = 0 \\ x^4 - 4p^2x^2 + 2p^4 &= 0; \quad x^2 = z; \quad z^2 - 4p^2z + 2p^4 = 0 \\ z = 2p^2 \pm \sqrt{4p^4 - 2p^4} &= 2p^2 \pm \sqrt{2p^4} = p^2(2 \pm \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$x = \pm\sqrt{z} = \pm p\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$$

Такъ какъ x и p числа положительныя, то знакъ—передъ \sqrt{z} надо отбросить; тогда будетъ имѣть 2 рѣшенія;

$$x_1 = p\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x_2 = p\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Такъ какъ для рѣшенія уравненія намъ пришлось возвысить обѣ его части въ квадратъ, отчего мы могли ввести постороннія рѣшенія, то полученные 2 значенія для x надо испытать подстановкой. Послѣ испытанія находимъ, что только одинъ x_1 годится. Значитъ, если разсматриваемая функция получаетъ maximum или minimum, то только при $x = x_1 = p\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

По виду производной трудно опредѣлить, мѣняетъ ли она свой знакъ, и какъ, при переходѣ x черезъ x_1 . Составленіе второй производной тоже затруднительно. Здѣсь удобнѣе всего поступить такимъ образомъ:

Такъ какъ наша функция непрерывна и имѣеть только одинъ maximum, или только одинъ minimum при $x = x_1$, то при всѣхъ значеніяхъ x , меньшихъ x_1 , знакъ производной долженъ быть одинъ и тотъ же, равно какъ и при всѣхъ значеніяхъ x , большихъ x_1 . Изо всѣхъ значеній, меньшихъ x_1 , возьмемъ O ; при $x = O$ производная имѣеть знакъ $-$, такъ какъ она при этомъ равна положительному числу $2p$.

Изъ всѣхъ значеній, большихъ x_1 , возьмемъ $2p$. Не трудно видѣть, что при $x = 2p$, производная обращается въ $-\infty$ и, слѣд., при значеніяхъ x , близкихъ къ $2p$, она имѣеть знакъ—; значитъ, при переходѣ x черезъ x_1 производная мѣняетъ знакъ $+$ на $-$; слѣд., при $x = x_1 = p\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ данная функция получаетъ maximum.

Теперь мы видимъ, что процессъ измѣненія площади 8-ми-угольника при измѣненіи x отъ O до $2p$ есть слѣдующій:

При измѣненіи x отъ O до $p\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ эта площадь возрастаетъ отъ O до maximum (наиб. значенія), равнаго $2p^2(\sqrt{2} + 1) = p^2 \cdot 4,828..$; при измѣненіи x отъ $p\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ до $2p$ площадь убываетъ отъ указаннаго maximum до $4p^2$ (когда 8-угольникъ обращается въ квадратъ со стороныю $2p$)

141. Прослѣдить измѣненіе полной поверхности цилиндра, вписанного въ шаръ радиуса R .

Отвѣтъ. Если x есть радиусъ основанія цилиндра, то при возрастаніи x отъ O до $R\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$ поверхность возрастаетъ отъ O до max., равнаго $\pi R^2(\sqrt{5} + 1)$; при дальнѣйшемъ возрастаніи x до R (крайнее значеніе) поверхность убываетъ до $2\pi R^2$.

142. Прослѣдить измѣненіе суммы высоты и основанія равнобедреннаго треугольника, вписанного въ кругъ постояннаго радиуса R (высота треугольника предполагается не менше R).

Отвѣтъ. Если x есть разстояніе основанія трѣугольника до центра круга, то при возрастаніи x отъ O до $\frac{1}{5}R\sqrt{5}$ сумма основанія съ высотою возрастаетъ отъ $3R$ до maximum, равнаго $R(1 + \sqrt{5})$; при дальнѣйшемъ возрастаніи x до R эта сумма уменьшается до $2R$.

Составить уравнения касательной и нормали къ кривымъ, заданнымъ уравненіями:

143. $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x} + 1$ (въ точкѣ x_1, y_1).

Отвѣтъ. Ур. кас. $(y - y_1)(2x_1^2\sqrt{x_1}) = (x - x_1)(x_1^2 - 2\sqrt{x_1})$

Ур. норм. $(y - y_1)(2\sqrt{x_1} - x_1)^2 = (x - x_1)(2x_1^2\sqrt{x_1})$

144. $y = \frac{x^2}{2} - 3x + 1$ (въ точкѣ x_1, y_1).

Отвѣтъ. Ур. кас. $y - y_1 = (x_1 - 3)(x - x_1)$

Ур. норм. $(y - y_1)(3 - x_1) = x - x_1$.

145. $y = x + \sqrt{x}$ (въ точкѣ, кот. абсцисса = 4).

Отвѣтъ. Ур. кас. $4(y - 6) = 5(x - 4)$.

146. $x^3 + y^2 - 2x - 5 = 0$ (въ точкѣ съ абсциссой - 2).

Отвѣтъ. Такихъ точекъ двѣ: (-2, 3) и (-2, -3).

Для первой ур. касат. будеть: $3(y - 3) + 5(x + 2) = 0$, для второй: $3(y + 3) - 5(x + 2) = 0$.

147. $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ (въ точкѣ, кот. абсцисса = 3).

Отвѣтъ. Ур. касательной: $11x - y = 27$.

148. $y = x^2 - x$ (въ точкѣ съ абсциссой x_1).

Отвѣтъ. Ур. касательной: $y = (2x_1 - 1)x - x_1^2$.

149. $y = m \operatorname{Log} x$ (въ точкѣ съ абсциссой e).

Отвѣтъ. Ур. касательной: $(y - m)e = m(x - e)$.

Найти интегралы.

I. Интегрированіе степеній.

150. $\int x^2 dx \dots \dots \dots$ Отвѣтъ. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

151. $\int 3x^2 dx \dots \dots \dots$ $x^3 + C$.

152. $\int 2\sqrt{x} dx = \int 2x^{\frac{1}{2}} dx \dots \dots \dots \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$.

153. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} \dots \dots \dots \sqrt{x} + C$.

154. $\int 3\sqrt[3]{x^2} dx = \int 3x^{\frac{2}{3}} dx \dots \dots \dots \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{x^2} + C$.

155. $\int \frac{2dx}{x^3} = \int 2x^{-3} dx \dots \dots \dots -\frac{1}{x^2} + C$.

156. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx \dots \dots \dots 3\sqrt[3]{x} + C$.

157. $\int \sqrt[4]{x^3} dx \dots \dots \dots \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}\sqrt[4]{x^3} + C$.

158. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \dots \dots \dots -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$.

II. Интегрированіе посредствомъ введенія вспомогательной переменной.

159. $\int \frac{dx}{1+x} \dots \dots \dots \operatorname{Log}(1+x) + C$.

160. $\int \frac{x dx}{1+x^2} \dots \dots \dots \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + C$.

161. $\int \frac{3dx}{1-2x} \dots \dots \dots -\frac{3}{2}\operatorname{Log}(1-2x) + C$.

162. $\int \frac{x dx}{x^2+a} \dots \dots \dots \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2+a) + C$.

$$\checkmark 163. \int \frac{dx}{x^2+a^2} \dots \dots \dots \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$\checkmark 164. \int x^3 \sqrt{x-4} dx \dots \dots \dots \frac{3}{7} (x-4) (x+3)^3 \sqrt{x-4} + C.$$

$$\checkmark 165. \int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} \dots \dots \dots 2 \operatorname{Log} (\sqrt{x}+1) + C.$$

$$\checkmark 166. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} \dots \dots \dots \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + C.$$

$$\checkmark 167. \int \frac{dx}{x \sqrt{x-a}} \dots \dots \dots \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-a}{a}} + C.$$

Замѣчаніе. Въ 4-хъ послѣднихъ примѣрахъ за вспомогательную переменную надо принимать тотъ корень, который входитъ въ подынтегральную функцию.

$$\checkmark 168. \int \frac{dx}{e^x} \dots \dots \dots - \frac{1}{e^x} + C.$$

$$\checkmark 169. \int e^x \sqrt{1+e^x} dx \dots \dots \dots \frac{2}{3} (1+e^x) \sqrt{1+e^x} + C.$$

$$\checkmark 170. \int \frac{\operatorname{Log} x \, dx}{x} \dots \dots \dots \frac{1}{2} (\operatorname{Log} x)^2 + C.$$

$$\checkmark 171. \int \cos(a+bx) dx \dots \dots \dots \frac{1}{b} \sin(a+bx) + C.$$

$$\checkmark 172. \int \sin(a+bx) dx \dots \dots \dots - \frac{1}{b} \cos(a+bx) + C.$$

$$\checkmark 173. \int \frac{dx}{a+bx^2} \dots \dots \dots \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}} + C.$$

$$\checkmark 174. \int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \dots \dots \dots - \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + C.$$

$$\checkmark 175. \int \frac{x dx}{a^4+x^4} \dots \dots \dots \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + C.$$

$$\checkmark 176. \int e^{ax} dx \dots \dots \dots \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

$$\checkmark 177. \int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^n} \dots \dots \dots \frac{(x^2+a^2)^{1-n}}{2(1-n)} + C.$$

$$\checkmark 178. \int \frac{dx}{4+9x^2} \dots \dots \dots \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C.$$

III. Интегрированіе по частямъ.

$$\checkmark 179. \int x e^{mx} dx \quad (x=u, e^{mx} dx=du) \dots \dots \dots \frac{xe^{mx}}{m} - \frac{e^{mx}}{m^2} + C \quad 177, 178$$

$$\checkmark 180. \int \operatorname{arc sin} x dx \quad (\operatorname{arc sin} x=u) \dots \dots \dots x \operatorname{arc sin} x + \sqrt{1-x^2} + C \quad 189, 190,$$

$$\checkmark 181. \int \operatorname{arctg} x dx \quad (\operatorname{arctg} x=u) \dots \dots \dots x \operatorname{arctg} x - \operatorname{Log} \sqrt{1+x^2} + C \quad 191.$$

$$\checkmark 182. \int x \cos x dx \quad (x=u) \dots \dots \dots x \sin x + \cos x + C$$

$$\checkmark 183. \int x^2 \cos x dx. \text{ Указаніе. Положивъ } x^2=u \text{ и } \cos x dx=$$

— dv, мы приведемъ этотъ интегралъ къ интегралу отъ $x \sin x dx$, въ которомъ надо положить $x=v$ и $\sin x dx=du$.

Отвѣтъ. $\frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C.$

✓ 184. $\int x^m \log x dx \quad (\log x = u) \dots \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\log x - \frac{1}{m+1} \right) + C$

? 185. $\int \frac{\log x dx}{x} \quad (\log x = u) \dots \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$

✓ 186.
$$\begin{cases} \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} e^x dx = dv \\ \cos x = u \end{array} \right.$$

Отсюда находимъ, что:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

? 187. $\int x^2 e^x dx \dots e^x (x^2 - 2x + 2) + C$

Указаниe. Положивъ $x^2 = u$ и $e^x dx = dv$, приведемъ данный интегралъ къ интегралу отъ $x e^x dx$, который найдемъ положивъ въ нѣмъ $x = u$ и $e^x dx = dv$.

? 188. $\int x^3 e^x dx \dots e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

Указаниe. См. примѣръ предыдущій.

189. $\int \log x dx \dots x \log x - x$

? 190. $\int (\log x)^3 dx \dots x ((\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x \log x - 6x + C)$

Указаниe. Положивъ $(\log x)^3 = u$ и $dx = dv$, придемъ къ интегралу отъ $(\log x)^2 dx$; этотъ послѣдній такимъ же путемъ приведемъ къ интегралу отъ $\log x dx$, который найденъ былъ выше.

191. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx \dots \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{2} a \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$

Указаниe. Положивъ $\sqrt{a^2 + x^2} = u$ и $dx = dv$, мы при-
ведемъ данный интегралъ къ $\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, который можетъ
быть найденъ введеніемъ вспомогательной переменной u ,
опредѣляемой уравненіемъ $u = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ (см. стран. 149).

IV. Интегрированіе разложеніемъ на слагаемыя.

✓ 192. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \dots \operatorname{tg} x - \operatorname{cot} g x + C$

✓ 193. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \dots \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

✓ 194. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \dots \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

✓ 195. $\int \frac{x dx}{x-1} \dots x + \log(x-1) + C$

196. $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1} dx \dots \dots \dots \frac{1}{2}x^2 + \operatorname{arctg} x + C$

197. $\int \frac{2x^2-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \dots \dots \dots \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

198. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx \dots \dots \operatorname{arc sin} x - \sqrt{1-x^2} + C$

199. $\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} dx \dots \dots \operatorname{arcsin} \frac{a}{x} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$

200. $\int \frac{dx}{x^2+x} \dots \dots \operatorname{Log} \frac{x}{x+1} + C$

201. $\int \frac{x^3 dx}{1+x^2} \dots \dots \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1+x^2) + C$

202. $\int x \operatorname{Log}(1+x^2) dx \dots \dots \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Log}(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Log}(1+x^2) + C$

Указание. Примѣнія сначала интегрированіе по частямъ, можно привести данный интеграль къ интегралу упражненія № 201.

203. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \dots \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$

Указание. Рѣшается интегрированіемъ по частямъ и затѣмъ примѣненіемъ разложенія.

Нахожденіе площадей и объемовъ.

204. Найти площадь параболы $y^2=16x$ между $x_1=0$ и $x_2=5$.

Замѣчаніе. Эта задача, какъ и нѣкоторыя послѣдующія, выражена сокращенно; ее надо понимать такъ: найти площадь, ограниченную осью x —овъ, дугою параболы, заданной уравненіемъ $y^2=16x$, и двумя ординатами этой параболы, соотвѣтствующими абсциссамъ: $x_1=0$ и $x_2=5$.

Отвѣтъ. $4 \int_0^5 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{40}{3}\sqrt{5}$

205. Опредѣлить площадь параболы $y^2=9x$ между $x_1=4$ и $x_2=25$.

Отвѣтъ. $3 \int_4^{25} x^{\frac{1}{2}} dx = 234.$

206. Дана синусоида $y=\sin x$. Найти площадь, образованную одною петлею ея съ осью x —овъ.

Отвѣтъ. Искомая площадь есть площадь, взятая между $x_1=0$ и $x_2=\pi$; она равна

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2.$$

207. Построить кривую $y=3x - x^3$. Опредѣлить площадь, заключающуюся между осью x —овъ и дугою, ограниченной 2 точками пересѣченія ея съ осью x —овъ.

Отвѣтъ. Кривая пересѣкается съ осью x —овъ въ трехъ точкахъ: $x_1=0$, $x_2=+\sqrt{3}$ и $x_3=-\sqrt{3}$. Площадь, заключающаяся между x_1 и x_2 , есть:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (3x - x^3) dx = \frac{9}{4}$$

208. Найти площадь кривой $y=\frac{1}{x^2}$ между $x_1=a$ и $x_2=b$, а также предѣль, къ которому стремится эта площадь, когда b безпредѣльно возрастаетъ.

Отвѣтъ. Пл. $= \int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; предѣль $= \frac{1}{a}$.

209. Найти площадь гиперболы $xy=2$ между $x_1=1$ и $x_2=e$.

Отвѣтъ.

$$\int_1^e \frac{2dx}{x} = 2.$$

210. Найти площадь кривой $y=a^x$ (см. черт. 6 стр. 49) между x_1 и x_2 и опредѣлить предѣль, къ которому стремится эта площадь, когда x_1 стремится къ $-\infty$, а $x_2=0$.

Отвѣтъ Пл. = $\int_{x_1}^{x_2} a^x dx = \frac{a^x - a^{x_1}}{\log a}$; предѣль = $\frac{1}{\log a}$

211. Доказать, что кривая $y=\sqrt[n]{p x^m}$ дѣлить площадь прямоугольника, построенного на ординатахъ любой ея точки, на 2 части въ отношеніи $m:n$.

Рѣшеніе. Площадь P этой кривой между $x_1=0$ и $x_2=a$ есть

$$P = \int_0^a \sqrt[n]{p x^m} px = \frac{n \sqrt[n]{p}}{m+n} a^{\frac{m+n}{n}}$$

Площадь Q прямоугольника, построенного на ординатахъ точки, имѣющей абсциссу a , равна:

$$Q = a \sqrt[n]{p a^m} = \sqrt[n]{p} a^{\frac{m+n}{n}}$$

Слѣд.: $Q:P=(m+n):n$; откуда $Q-P:P=m:n$.

212. Построить параболу $y^2=ax$ и окружность $y^2=2ax-x^2$. Найти площадь, ограниченную съ одной стороны дугою параболы, а съ другой—дугою окружности.

Отвѣтъ. Ось параболы совпадаетъ съ осью x -овъ и вершина ея съ началомъ координатъ. Центръ круга лежитъ на оси x -овъ на разстояніи a отъ начала координатъ, радиусъ круга есть a . Парабола и окружность касаются въ точкѣ $(0,0)$ и пересѣкаются въ точкахъ (a,a) и $(a,-a)$. Искомая площадь имѣть два значенія:

$$a^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3} \right) \text{ и } a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \right)$$

213. Парабола $y=2px$ вращается вокругъ оси x -овъ, образуя параболоидъ вращенія. Найти объемъ его V между $x_1=0$ и $x_2=a$.

Отвѣтъ. $V=pa^2$.

214. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ вращается вокругъ оси x -овъ, образуя гиперболоидъ вращенія. Найти объемъ его V между $x_1=a$ и $x_2=m$.

Отвѣтъ. $V = \frac{bm^3}{3a} - abm - \frac{2}{3}a^2b$